2　等化複体のホモロジー群

順序単体　順序 n-単体 $s=a_0\cdots a_n,\ u=b_0\cdots b_n$ の間には頂点の順序を保つ唯一の Affine 同相 $\sigma=\sigma_{us}$ が

$$\sigma_{us}: s\xrightarrow{\cong} u,\qquad \sigma(a_i)=b_i,\ (\forall i),\qquad \sigma\Big(\sum_{i=0}^{n} t_i a_i\Big)=\sum_{i=0}^{n} t_i b_i\quad\Big(\sum_{i=0}^{n} t_i=1,\ \forall\, t_i\geqq 0\Big)$$

で定まる．(ここでは「同型」ということにして $s\cong u$ と表す.) (Affine 写像 = 線型写像+平行移動.) このとき

$$\sigma_{ss}=1_s,\qquad (\sigma_{us})^{-1}=\sigma_{su},\qquad \sigma_{wu}\circ\sigma_{us}=\sigma_{ws}$$

定義 2.1 (等化複体) 単体複体 K の各単体には順序が与えられているとする．K に次をみたす同値関係 $\sim$ が与えられたとき, 商集合 $K/{\sim}$ を**等化複体**という．　$s,u\in K$ に対し,
(1)　$s\sim u\Rightarrow s\cong u$　($\therefore\ \dim s=\dim u$ で, K_n の同値関係を導く.)
(2) $\sim$ は部分単体間の $\sim$ と整合している．即ち,

$$s\sim u,\ s'<s,\ u'<u,\ \ \sigma_{us}(|s'|)=|u'|\implies s'\sim u'\ \text{かつ}\ \ \sigma_{u's'}=\sigma_{us}|_{s'}$$

(部分単体 s' の像 u' の頂点の順序は s' の頂点の σ_{us} による像の順序に一致している.)
同値関係 $\sim$ は多面体 $|K|$ 上の同値関係 $\sim$

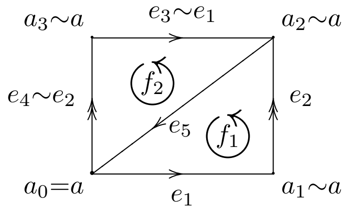
$$x\sim y\iff \exists s,u\in K\ (\ x\in|s|,\ y\in|u|,\ s\sim u,\ \sigma_{us}(x)=y)$$

を導く．((2) より s $(,u)$ の取り方によらない.) この商空間 $|K|/{\sim}$ を $|K/{\sim}|$ とも表す.
(ここでは位相空間の単体分割を考える代りに多面体の特殊な商空間となっている様な空間の分割を考えている.)

• $C_n(K/{\sim}):=\mathbb{Z}\langle K_n/{\sim}\rangle$, $\partial([s])=\sum_i(-1)^i[\partial^i s]$ ($[s]$ は s の同値類) と定めると $\{C_n(K/{\sim}),\partial_n\}$ は chain complex になる．そのホモロジー群 $H_n(K/{\sim})$ を等化複体のホモロジー群といい, $X\approx|K|/{\sim}$ のときは $H_n(X)$ とも表す.
以下, $C_i(K/{\sim}),\ H_i(K/{\sim})$ 等は　$C_i,\ H_i,\ Z_i,\ B_i$, 等と略し, 同値類や剰余類は代表元をそのまま用いて表す.

例 2　$K=\{a_0,\cdots,a_3,e_1,\cdots,e_5,f_1,f_2\}$ は四角形の単体分割 (下図) で, 頂点を $a_0,\ldots,a_3$, 三角形を $f_1:=a_0a_1a_2$, $f_2:=a_0a_2a_3$,　辺は $e_1:=a_0a_1,\ e_2:=a_1a_2,\ e_5:=a_2a_0$ とし, e_3,e_4 は以下で与え, 他の辺と同一視する.

例 2.1 (2 次元トーラス T^2)　$e_3:=a_3a_2,\ e_4:=a_0a_3,\ e_1\sim e_3,\ e_2\sim e_4$.



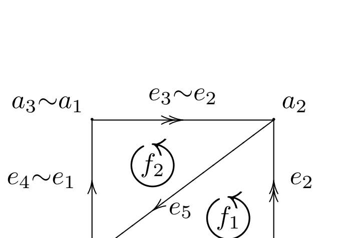
$e_1{\sim}e_3\Rightarrow a_0{\sim}a_3,\ a_1{\sim}a_2$.　$e_2{\sim}e_4\Rightarrow a_1{\sim}a_0,\ a_2{\sim}a_3$.　$\therefore\ a{:=}a_0{\sim}a_1{\sim}a_2{\sim}a_3$.
$\therefore\ K/{\sim}=\{a,e_1,e_2,e_5,f_1,f_2\},\ \ |K/{\sim}|\approx T^2$.
$C_2=\mathbb{Z}\langle f_1,f_2\rangle,\ C_1=\mathbb{Z}\langle e_1,e_2,e_5\rangle,\ C_0=\mathbb{Z}\langle a\rangle$, その他 $=0$.
(H_2)　$\partial f_1=e_1{+}e_2{+}e_5,\ \partial f_2=-e_1{-}e_2{-}e_5=-\partial f_1$.　$f:=f_1{+}f_2$ とおくと $\partial f=0$.
$f_2=f{-}f_1$ と表せるので f,f_1 は C_2 の標準基底で　$C_2=\mathbb{Z}\langle f,f_1\rangle,\ Z_2=\mathbb{Z}\langle f\rangle$,
$B_1'=\mathbb{Z}\langle f_1\rangle$. $B_2=C_3=0$ より　$H_2=Z_2=\mathbb{Z}\langle f\rangle\cong\mathbb{Z}$. ($B_i'$ は標準基底で用いたもの.)
(H_1)　$\partial e_1=a_1{-}a_0=a{-}a=0$,　同様に $\partial e_2=a{-}a=0,\ \partial e_5=a{-}a=0$. $\therefore\ Z_1=C_1$.
$B_1=\mathbb{Z}\langle\partial f_1\rangle$.　$e_5=\partial f_1{-}e_1{-}e_2$ と表せるので $C_1=Z_1=\mathbb{Z}\langle\partial f,e_1,e_2\rangle$ (標準基底).　$B_0'=0$.

$$\therefore\ H_1=Z_1/B_1=\mathbb{Z}\langle\partial f,e_1,e_2\rangle/\mathbb{Z}\langle\partial f_1\rangle\cong\mathbb{Z}\langle\partial f_1\rangle/\mathbb{Z}\langle\partial f_1\rangle\oplus\mathbb{Z}\langle e_1,e_2\rangle=\mathbb{Z}\langle e_1,e_2\rangle\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}.$$

(H_0)　$Z_0=C_0=\mathbb{Z}\langle a\rangle,\ B_0=0$ より $H_0=\mathbb{Z}\langle a\rangle\cong\mathbb{Z}$. よって

$$H_i(T^2)\cong\begin{cases}\mathbb{Z} & (i=0,2)\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & (i=1)\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

例 2.2 (2 次元球面 S^2)　$e_3:=a_3a_2,\ e_4:=a_0a_3,\ e_1\sim e_4,\ e_2\sim e_3$.　$e_1{\sim}e_4\Rightarrow a_1{\sim}a_3$.
$e_2{\sim}e_3\Rightarrow a_1{\sim}a_3$.　$\therefore\ K/{\sim}=\{a_0,a_1,a_2,e_1,e_2,e_5,f_1,f_2\},\ \ |K/{\sim}|\approx S^2$.

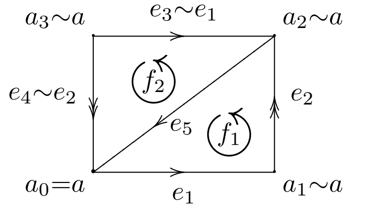


(H_2)　$C_2=\mathbb{Z}\langle f_1,f_2\rangle,\ \partial f_1=e_1{+}e_2{+}e_5,\ \partial f_2=-e_1{-}e_2{-}e_5=-\partial f_1$.
$f:=f_1{+}f_2$ とおくと $\partial f=0$. 例 2.1 と同様, $C_2=\mathbb{Z}\langle f,f_1\rangle,\ Z_2=\mathbb{Z}\langle f\rangle,\ B_1'=\mathbb{Z}\langle f_1\rangle$.
$B_2=C_3=0$ より　$H_2=Z_2=\mathbb{Z}\langle f\rangle\cong\mathbb{Z}$.
(H_1)　$C_1=\mathbb{Z}\langle e_1,e_2,e_5\rangle,\ B_1'\cong B_1=\mathbb{Z}\langle\partial f_1\rangle$.
$\partial e_1=a_1{-}a_0,\ \partial e_2=a_2{-}a_1,\ \partial e_5=a_0{-}a_2$.　$e_5=\partial f_1{-}e_1{-}e_2$ と表せるので
$C_1=\mathbb{Z}\langle\partial f_1,e_1,e_2\rangle$.　$Z_1=\mathbb{Z}\langle\partial f_1\rangle=B_1$.　$B_0'=\mathbb{Z}\langle e_1,e_2\rangle$.　$\therefore\ H_1=Z_1/B_1=0$
(H_0)　$Z_0=C_0=\mathbb{Z}\langle a_0,a_1,a_2\rangle,\ B_0=\mathbb{Z}\langle\partial e_1,\partial e_2\rangle$ より　$Z_0=\mathbb{Z}\langle a_0,\partial e_1,\partial e_2\rangle$. $H_0=\mathbb{Z}\langle a_0\rangle\cong\mathbb{Z}$. よって

$$H_i(S^2)\cong\begin{cases}\mathbb{Z} & (i=0,2)\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

T^2,S^2 の 2-cycle f は向き付けられた閉曲面そのものを表すと考えられ, 閉曲面 T^2,S^2 の**基本 (ホモロジー) 類** (fundamental (homology) class) といわれ．それぞれ $[T^2],[S^2]$ と表される.

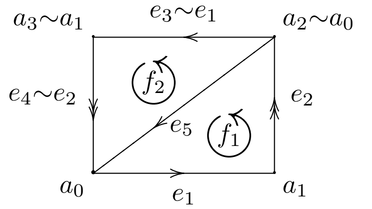
例 2.3 (Klein bottle (クラインの壺) KB) $e_3 := a_3a_2,\ e_4 := a_3a_0,\ e_1 \sim e_3,\ e_2 \sim e_4.$



$e_1{\sim}e_3 \Rightarrow a_0{\sim}a_3,\ a_1{\sim}a_2.\ \ e_2{\sim}e_4 \Rightarrow a_1{\sim}a_3,\ a_2{\sim}a_0.\ \therefore\ a_0{\sim}a_1{\sim}a_2{\sim}a_3 =: a.$
$K/{\sim} = \{a, e_1, e_2, e_5, f_1, f_2\},\ \ |K/{\sim}| \approx \mathrm{KB}.$
$(H_2)\ \ C_2 = \mathbb{Z}\langle f_1, f_2\rangle,\ \partial f_1 = e_1{+}e_2{+}e_5,\ \partial f_2 = -e_3{+}e_4{-}e_5 = -e_1{+}e_2{-}e_5.$
$f := f_1{+}f_2$ とおくと $\partial f = 2e_2$. 例 2.1 と同様, $C_2 = \mathbb{Z}\langle f, f_1\rangle,\ Z_2 = 0,\ B_1' = \mathbb{Z}\langle f, f_1\rangle.$
$B_2 = C_3 = 0$ より　$H_2 = Z_2 = 0.$
$(H_1)\ \ C_1 = \mathbb{Z}\langle e_1, e_2, e_5\rangle,\ B_1' \cong B_1 = \mathbb{Z}\langle \partial f, \partial f_1\rangle = \mathbb{Z}\langle \partial f_1, 2e_2\rangle.$
$\partial e_1 = a{-}a = 0, \partial e_2 = a{-}a = 0,\ \partial e_5 = a{-}a = 0.\ \therefore\ Z_1 = C_1.\ B_0' = 0.\ e_5 = \partial f_1{-}e_1{-}e_2$ より $Z_1 = \mathbb{Z}\langle \partial f_1, e_1, e_2\rangle.$
$H_1 = Z_1/B_1 = \mathbb{Z}\langle \partial f_1, e_1, e_2\rangle/\mathbb{Z}\langle \partial f_1, 2e_2\rangle = \mathbb{Z}\langle e_1\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle e_2\rangle/\mathbb{Z}\langle 2e_2\rangle = \mathbb{Z}\langle e_1\rangle \oplus \mathbb{Z}/2\langle e_2\rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2.$
$(H_0)\ \ Z_0 = C_0 = \mathbb{Z}\langle a\rangle,\ B_0 \cong B_0' = 0$ より $Z_0 = H_0 = \mathbb{Z}\langle a\rangle \cong \mathbb{Z}$. よって

$$H_i(\mathrm{KB}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i{=}0) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 & (i{=}1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

例 2.4 (実射影平面 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$) $e_3 := a_2a_3,\ e_4 := a_3a_0,\ e_1 \sim e_3,\ e_2 \sim e_4.$



$e_1{\sim}e_3 \Rightarrow a_0{\sim}a_2,\ a_1{\sim}a_3.\ \ e_2{\sim}e_4 \Rightarrow a_1{\sim}a_3,\ a_2{\sim}a_0.\ \therefore\ a_0{\sim}a_2,\ a_1{\sim}a_3.$
$K/{\sim} = \{a_0, a_1, e_1, e_2, e_5, f_1, f_2\},\ \ |K/{\sim}| \approx \mathbb{R}\mathrm{P}^2.$
$(H_2)\ \ C_2 = \mathbb{Z}\langle f_1, f_2\rangle,\ \partial f_1 = e_1{+}e_2{+}e_5,\ \partial f_2 = e_3{+}e_4{-}e_5 = e_1{+}e_2{-}e_5.$
$f := f_1{+}f_2$ とおくと $\partial f = 2e_1{+}2e_2.\ C_2 = \mathbb{Z}\langle f, f_1\rangle,\ \ Z_2 = 0,\ \ B_1' = \mathbb{Z}\langle f, f_1\rangle.$
$B_2 = C_3 = 0$ より　$H_2 = Z_2 = 0.$
$(H_1)\ \ C_1 = \mathbb{Z}\langle e_1, e_2, e_5\rangle,\ B_1' \cong B_1 = \mathbb{Z}\langle \partial f_1, \partial f\rangle = \mathbb{Z}\langle \partial f_1, 2(e_1{+}e_2)\rangle.$
$\partial e_1 = a_1{-}a_0,\ \partial e_2 = a_0{-}a_1,\ \partial e_5 = a_0{-}a_0 = 0.\ \ z := e_1{+}e_2$ とおくと $\partial z = 0.\ e_2 = z{-}e_1.\ e_5 = \partial f_1{-}e_1{-}e_2$ より,
$C_1 = \mathbb{Z}\langle e_1, \partial f_1, z\rangle,\ Z_1 = \mathbb{Z}\langle \partial f_1, z\rangle,\ B_0' = \mathbb{Z}\langle e_1\rangle.\ \ B_1 = \mathbb{Z}\langle \partial f_1, 2(e_1{+}e_2)\rangle = \mathbb{Z}\langle \partial f_1, 2z\rangle$ より
$H_1 = Z_1/B_1 = \mathbb{Z}\langle \partial f_1, z\rangle/\mathbb{Z}\langle \partial f_1, 2z\rangle = \mathbb{Z}\langle z\rangle/\mathbb{Z}\langle 2z\rangle = \mathbb{Z}/2\langle z\rangle \cong \mathbb{Z}/2.$
$(H_0)\ Z_0 = C_0 = \mathbb{Z}\langle a_0, a_1\rangle,\ B_0' \cong B_0 = \mathbb{Z}\langle \partial e_1\rangle = \mathbb{Z}\langle a_1{-}a_0\rangle.\ Z_0 = \mathbb{Z}\langle \partial e_1, a_0\rangle$ より $Z_0 = H_0 = \mathbb{Z}\langle a_0\rangle \cong \mathbb{Z}$. よって

$$H_i(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (i{=}0) \\ \mathbb{Z}/2 & (i{=}1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$H_2(KB) = H_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = 0$ は これらの閉曲面が向き付けられないことを表す.

(注) $\mathbb{Z}/2$ 係数のホモロジー群は向きを考えないホモロジー群を表す. 例 2.3 の f は $\partial f = 2e_2$, 例 2.4 の f は $\partial f = 2(e_1{+}e_2)$ なので $\mathbb{Z}/2$ 係数ではどちらも cycle になる. このホモロジー類は向き付けられない曲面そのものを表すと考えられ, mod 2 基本 (ホモロジー) 類といわれる. また, $[\mathbb{R}\mathrm{P}^2]_2$ 等と表される.

参考 (表現行列による計算法) 例 2.4 ($\mathbb{R}\mathrm{P}^2$) の H_i を ∂ の表現行列を基本変形することにより求めてみる.
一般に, $f : \mathbb{Z}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \to \mathbb{Z}\langle y_1, \ldots, y_m\rangle$ (準同型) に対し, $f(x_j) = \sum_{i=1}^m y_i f_{ij}\ j{=}1, \ldots, n\ (f_{ij} \in \mathbb{Z})$ のとき, $m{\times}n$ $\mathbb{Z}$-行列 $F = (f_{ij})$ が f の表現行列である: $(f(x_1) \cdots f(x_n)) = (y_1 \cdots y_m)F$. これを求めるには

$$\begin{cases} f(x_1){=}y_1f_{11}{+}\cdots{+}y_mf_{m1} \\ \qquad\qquad\vdots \\ f(x_n){=}y_1f_{1n}{+}\cdots{+}y_mf_{mn} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \text{ の転置 } [f(x_1) \cdots f(x_n)]{=}[y_1 \cdots y_n] \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix}$$

をとるのが求めやすい. これを例 4 ($\mathbb{R}\mathrm{P}^2$) に適用する: $C_2 = \mathbb{Z}\langle f_1, f_2\rangle,\ C_1 = \mathbb{Z}\langle e_1, e_2, e_5\rangle,\ C_0 = \mathbb{Z}\langle a_0, a_1\rangle.$

$$\begin{cases} \partial_2 f_1{=}e_1{+}e_2{+}e_5 \\ \partial_2 f_2{=}e_1{+}e_2{-}e_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \partial_2 f_1 \\ \partial_2 f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = {}^tF \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \underset{\text{転置}}{\longmapsto} F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\text{基本変形}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

より適当に C_2, C_1 の基底を取り換えれば $C_2 = \mathbb{Z}\langle f_1', f_2'\rangle,\ C_1 = \mathbb{Z}\langle e_1', e_2', e_5'\rangle,\ \partial_2 f_1' = e_1', \partial_2 f_2' = 2e_2'$ とできる.
$\therefore\ Z_2 = 0,\ H_2 = 0,\ B_1 = \mathbb{Z}\langle e_1', 2e_2'\rangle.$ ここで $\partial(2e_2'){=}\partial\partial f_2'{=}0 \Rightarrow \partial e_2'{=}0$ より e_1', e_2' は $\mathbb{Z}_1$ の基底 (の一部).

$$\begin{cases} \partial_1 e_1{=}\ a_1{-}a_0 \\ \partial_1 e_2{=}\ a_0{-}a_1 \\ \partial_1 e_5{=}0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \partial e_1 \\ \partial e_2 \\ \partial e_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = {}^tF \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad \underset{\text{転置}}{\longmapsto} F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\text{基本変形}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって, 適当に基底を取り換えれば $C_1 = \mathbb{Z}\langle e_1'', e_2'', e_5''\rangle,\ C_0 = \mathbb{Z}\langle a_0', a_1'\rangle,\ \ \partial e_5'' = a_1'$, その他 $= 0$ とできる.
$\therefore\ Z_1 = \mathbb{Z}\langle e_1'', e_2''\rangle,\ B_0 = \mathbb{Z}\langle a_1'\rangle.\ e_1', e_2'$ は Z_1 の基底 (の一部) で, $\mathrm{rank}\, Z_1 = 2$ より $Z_1 = \mathbb{Z}\langle e_1', e_2'\rangle.\ \ B_1 = \mathbb{Z}\langle e_1', 2e_2'\rangle$ より, $H_1 = \mathbb{Z}/2\langle e_2'\rangle \cong \mathbb{Z}/2,\ H_0 = C_0/B_0 = \mathbb{Z}\langle a_0', a_1'\rangle/\mathbb{Z}\langle a_1'\rangle = \mathbb{Z}\langle a_0'\rangle \cong \mathbb{Z}$. 纏めると例 2.4 と同じ結果を得る.