

1.7 chain complex の標準基底

($\mathbb{Z}$ -) 加群の基礎知識 $\mathbb{Z}$ の部分加群は $m\mathbb{Z}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) で $m \neq 0 \Rightarrow m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$.

($\because 0 \neq H \subset \mathbb{Z} \Rightarrow m = \min \{|n| \in H \mid n \neq 0\}$ とすれば $H = m\mathbb{Z}$.) $\mathbb{Z}$ の剰余加群は

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \begin{cases} \mathbb{Z} & m = 0 \\ 0 & m = 1 \\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & m \neq 0, 1 \end{cases}$$

$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/(m)$ や, $\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}/m$ などと表される. ここでは見やすい $\mathbb{Z}/m$ を使う.

- 自由 ($\mathbb{Z}$ -) 加群の部分加群は自由加群. (PID R 上の自由 R -加群の部分 R -加群も自由になる.)

定理 1.7.1 (有限生成加群 (アーベル群) の基本定理) 有限生成加群 G は (生成系を取り直すことにより)

$$G = \mathbb{Z}\langle u_1, \dots, u_r \rangle \oplus \mathbb{Z}/m_1\langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/m_t\langle v_t \rangle = \mathbb{Z}\langle u_1 \rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\langle u_r \rangle \oplus \mathbb{Z}/m_1\langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/m_t\langle v_t \rangle$$

(ここで, $1 < m_1 \leq \dots \leq m_t$, $m_i | m_{i+1}$ ($= m_i$ は m_{i+1} を割り切る) ($i = 1, \dots, t-1$))

と直和分解される. この $r, m_1, \dots, m_t$ は条件 $m_i | m_{i+1}$ ($i = 1, \dots, t-1$) の下で一意的に定まる.

定義 1.7.1 有限生成加群 G をこの定理により直和分解するとき, この分解を $(r; m_1, \dots, m_t)$ 型の**標準直和分解**,

$\mathbb{Z}\langle u_1, \dots, u_r \rangle$ を G の **free part**, $\mathbb{Z}/m_1\langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/m_t\langle v_t \rangle$ を G の **torsion part** (torsion= 振れ),

r を G の **階数** (rank), $m_1, \dots, m_t$ を **振れ係数** (torsion coefficients) という.

また, 自由加群の **基底** とは一次独立な生成系の事であり, 加群が基底をもつとき自由加群という. 加群の階数とは一次独立な部分集合の濃度 (個数) の最大値の事である.

この基本定理の証明の概略は計算法を与えるが, ここではより一般に自由加群間の準同型について考察しておく.

整数行列の標準形 有限生成自由 $\mathbb{Z}$ 加群 $M = \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, $N = \mathbb{Z}\langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$ の間の準同型

$f: M \rightarrow N$ は, 線形代数の場合と同様に, $m \times n$ 整数行列 F で表せる. 即ち,

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^m y_i f_{ij}, \quad f_{ij} \in \mathbb{Z} \quad (j = 1, \dots, n), \quad F = (f_{ij})$$

とすれば, $v = v_1 x_1 + \dots + v_n x_n$, $\mathbf{v} = {}^t(v_1 \dots v_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対し

$$f(v) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n f(x_j) v_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m y_i f_{ij}\right) v_j = \sum_{i=1}^m y_i \left(\sum_{j=1}^n f_{ij} v_j\right) = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m) F \mathbf{v}$$

f を $\mathbb{R}$ 上の線形写像に拡張して考えるとき, 行列 F は行と列の基本変形により標準形に変形できる.

即ち, (基本行列の積である) 正則行列 P, Q により

$$PFQ = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} =: F', \quad r = \text{rank } F \quad (E_r \text{ は } r \text{ 次単位行列})$$

これは P, Q で基底 $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_m)$ を変換することにより, 線形写像 f の表現行列が標準形 F' にできることを意味する. 即ち, 基底を $(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n)Q^{-1}$, $(y_1, \dots, y_m) = (y'_1, \dots, y'_m)P$ と変換するとき, f の表現行列が F' になり, 従って

$$f(x'_i) = \begin{cases} y'_i & i = 1, \dots, r \\ 0 & i > r \end{cases}$$

整数上でも同様に考察できるが, $\mathbb{Z}$ 上の基本変形は, 対応する基本行列 (とその積である正則行列 P, Q) が $\mathbb{Z}$ 上可逆である必要がある. (行列 P が ($\mathbb{Z}$ 上) 可逆 $\Leftrightarrow P, P^{-1}$ が整数行列) 従って, 対角成分を 1 に出来るかどうかは分からない.

定理 1.7.2 (整数行列の標準形 (Z 上の単因子論)) 整数行列 F は $\mathbb{Z}$ 上の基本変形:

(1) 行 (列) 交換, (2) ある行 (列) の整数倍を他の行 (列) に加える, (3) 行 (列) を (-1) 倍, を繰り返すことにより, 次の標準形に変形できる. 即ち, ($\mathbb{Z}$ 上可逆な基本行列の積である) 可逆行列 P, Q により

$$PFQ = F' = \begin{pmatrix} n_1 & & \\ & \ddots & \\ & & n_r \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad n_i | n_{i+1} \quad (i = 1, \dots, r-1)$$

とでき, この標準形は変形の仕方によらず一意的に定まる. 特に, F が正方行列のとき,

$\mathbb{Z}$ 上の標準形が単位行列 $\Leftrightarrow F$ は $\mathbb{Z}$ 上可逆 ($= F^{-1}$ も整数行列)

(n_1 は F の全ての成分の最大公約数, 積 $n_1 \cdots n_i$ は第 i 次小行列式全ての最大公約数になり一意性が出る.)

$n_1 = \cdots = n_s = 1$ (s 個), $1 < n_{s+1} \leq \cdots \leq n_r$ のとき, $n_{s+1}, \dots, n_r$ を $m_1, \dots, m_t$ ($t = r - s$) と書き直す. このとき, 基底 x_i, y_i を取り替えて,

$$M = \mathbb{Z}\langle a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t, z_1, \dots, z_{n-r} \rangle, \quad N = \mathbb{Z}\langle c_1, \dots, c_s, d_1, \dots, d_t, e_1, \dots, e_{m-r} \rangle$$

$$f(a_i) = c_i, \quad f(b_i) = m_i d_i, \quad f(z_i) = 0$$

とできる. この基底を f の **標準基底** ということにする. このとき

$$Z := \text{Ker } f = \mathbb{Z}\langle z_1, \dots, z_{n-r} \rangle, \quad B' := \mathbb{Z}\langle a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t \rangle$$

とすれば, $f|_{B'} : B' \cong \text{Im } f = \mathbb{Z}\langle c_1, \dots, c_s, m_1 d_1, \dots, m_t d_t \rangle =: B$ で,

$$M = B' \oplus Z, \quad N/B = N/\text{Im } f \cong \mathbb{Z}/m_1 \langle \bar{d}_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/m_t \langle \bar{d}_t \rangle \oplus \mathbb{Z} \langle \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{m-r} \rangle$$

ここで, $\bar{d}_i, \bar{e}_i$ は d_i, e_i の剰余類. ($N/B \cong$ 右辺, の証明は N から右辺への全射の核が B .)

有限生成加群の基本定理の証明は, G の生成系の (コピーの) 作る自由加群を N とし, 射影 $N \rightarrow G$ の核を M , 包含写像 $M \hookrightarrow N$ を f とすれば良い. 即ち, G の生成系を $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m$ とし, (コピー) $y_1, \dots, y_m$ の作る自由加群を N とすると, その核 M は自由加群になるのでその基底を $x_1, \dots, x_n$ とする.

($M = \text{Ker } p \xrightarrow{f} N \xrightarrow{p} G, M = B', Z = 0$.)

chain complex の標準基底

chain complex $C = \{C_n, \partial_n\}$ において, 各 C_n は階数 k_n の自由加群とする. C_n を

$$C_n = B'_{n-1} \oplus Z_n, \quad \partial_n| : B'_{n-1} \cong B_{n-1} = \text{Im } \partial_n$$

と分解し, B'_{n-1} の基底を ∂_n の標準基底 (上の a_i, b_i) になる様に取り, (次数 n を上に付けて a_i^n, b_i^n とする.) $B_n = \text{Im } \partial_{n+1} \subset Z_n = \text{Ker } \partial_n$ より Z_n の基底を ∂_{n+1} の標準基底になる様にとつて (上の c_i, d_i, e_i, m_i に次数 n を上に付けて $c_i^n, d_i^n, e_i^n, m_i^n$ とする) 次の様にする.

B'_{n-1} の基底: a_i^n ($i = 1, \dots, s_{n-1}$), b_i^n ($i = 1, \dots, t_{n-1}$),

Z_n の基底: c_i^n ($i = 1, \dots, s_n$), d_i^n ($i = 1, \dots, t_n$), e_i^n ($i = 1, \dots, r_n$),

$s_{n-1} + t_{n-1} + r_n + s_n + t_n = k_n = \text{rank } C_n$ ($s_{-1} = t_{-1} = 0$, $C_{n+1} = 0$ のとき $s_n = t_n = 0$),

$C_n = B'_{n-1} \oplus Z_n = \mathbb{Z}\langle a_1^n, \dots, a_{s_{n-1}}^n, b_1^n, \dots, b_{t_{n-1}}^n \rangle \oplus \mathbb{Z}\langle c_1^n, \dots, c_{s_n}^n, d_1^n, \dots, d_{t_n}^n, e_1^n, \dots, e_{r_n}^n \rangle$

$\partial_n(a_i^n) = c_i^{n-1}$ ($i = 1, \dots, s_{n-1}$), $\partial_n(b_i^n) = m_i^{n-1} d_i^{n-1}$ ($i = 1, \dots, t_{n-1}$), $\partial_n(c_i^n) = \partial_n(d_i^n) = \partial_n(e_i^n) = 0$ ($\forall i$)

($\partial_{n+1}(a_i^{n+1}) = c_i^n$ ($i = 1, \dots, s_n$), $\partial_{n+1}(b_i^{n+1}) = m_i^n d_i^n$ ($i = 1, \dots, t_n$))

このとき,

$$B_n = \mathbb{Z}\langle c_1^n, \dots, c_{s_n}^n, m_1^n d_1^n, \dots, m_{t_n}^n d_{t_n}^n \rangle,$$

$$H_n(C) = \mathbb{Z}\langle \bar{e}_1^n, \dots, \bar{e}_{r_n}^n \rangle \oplus \mathbb{Z}/m_1^n \langle \bar{d}_1^n \rangle \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/m_{t_n}^n \langle \bar{d}_{t_n}^n \rangle$$

以上を纏めると次の定理になる.

定理 1.7.3 (Chain complex の標準基底)

chain complex $C = \{C_n, \partial_n\}$ において、各 C_n が階数 k_n の自由加群のとき、 C_n の基底

$$\begin{aligned} a_i^n \ (i = 1, \dots, s_{n-1}), \quad b_i^n \ (i = 1, \dots, t_{n-1}), \quad c_i^n \ (i = 1, \dots, s_n), \\ d_i^n \ (i = 1, \dots, t_n), \quad e_i^n \ (i = 1, \dots, r_n), \quad (s_{n-1} + t_{n-1} + r_n + s_n + t_n = k_n) \end{aligned}$$

と自然数 $m_i^n > 1$ ($i = 1, \dots, t_n$), $m_i^n | m_{i+1}^n$ が存在して、 d_i^n, e_i^n の剰余類を $\overline{d_i^n}, \overline{e_i^n}$ と表すとき、

$$\begin{aligned} Z_n(C) &= \mathbb{Z}\langle c_1^n, \dots, c_{s_n}^n, d_1^n, \dots, d_{t_n}^n, e_1^n, \dots, e_{r_n}^n \rangle, \quad B_n(C) = \mathbb{Z}\langle c_1^n, \dots, c_{s_n}^n, m_1^n d_1^n, \dots, m_{t_n}^n d_{t_n}^n \rangle, \\ H_n(C) &= \mathbb{Z}\langle \overline{e_1^n}, \dots, \overline{e_{r_n}^n} \rangle \oplus \mathbb{Z}/m_1^n \langle \overline{d_1^n} \rangle \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/m_{t_n}^n \langle \overline{d_{t_n}^n} \rangle \end{aligned}$$

• この定理により、chain complex は原理的には標準基底をもち、それを求めるには、境界作用素 ∂_n を行列で表してその標準形を掃き出し法で求めれば良い事が分る。しかし、実際上は元の基底から標準基底を構成する方が容易な場合も多い。この場合、構成した (元と同じ個数の) 基底の候補が実際に基底になることを示すには、元の基底の各元が基底の候補の (整係数の) 一次結合で表せることを示せばよい。

定義 1.7.2 (単体複体の Euler(オイラー) 標数) (多面体定理における Euler 数の拡張として) 有限単体複体 K の Euler(標) 数 (Euler characteristic, Euler number) $\chi(K)$ を各次元の単体の個数 $\#K_i =: k_i$ の交代和とする:

$$\chi(K) := \#K_0 - \#K_1 + \dots + (-1)^n \#K_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \#K_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i k_i, \quad (n = \dim K)$$

例 1.7.1 (n -単体と n 次元球面 S^n の Euler 数) $s = a_0 \dots, a_n$ を n -単体, $K = K(s)$ とすると、 i 次元単体の個数 $\#K_i$ は $n+1$ 個の頂点から $i+1$ 個の頂点を選ぶ組み合わせの個数なので $\#K_i = {}_{n+1}C_{i+1}$. よって

$$\begin{aligned} \chi(K) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i {}_{n+1}C_{i+1} = {}_{n+1}C_1 - {}_{n+1}C_2 + \dots + (-1)^n {}_{n+1}C_{n+1} \\ &= 1 - ({}_{n+1}C_0 - {}_{n+1}C_1 + \dots + (-1)^{n+1} {}_{n+1}C_{n+1}) = 1 - (1-1)^{n+1} = 1 \end{aligned}$$

$n+1$ 次元単体 s の境界が S^n の単体分割 $K(s) - \{s\}$ を与えるので、 $\chi(S^n) = 1 - (-1)^{n+1} \begin{cases} 2 & (n \text{ は偶数}) \\ 0 & (n \text{ は奇数}) \end{cases}$

ホモロジー群 $H_k(K)$ の階数 $r_k := \text{rank } H_k(K)$ を $b_k = b_k(K)$ と表し、 K の k 次元 **Betti(ベッチ) 数** という。

定理 1.7.4 (Euler 数) n 次元有限単体複体 K に対し

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{rank } H_i(K)$$

証明 前定理より、 $u_i := s_i + t_i$ とおけば $k_i := \#K_i = u_{i-1} + r_i + u_i$, ($s_{-1} = t_{-1} = u_{-1} = 0$, $s_n = t_n = u_n = 0$) より

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (-1)^i k_i &= (u_{-1} + r_0 + u_0) - (u_0 + r_1 + u_1) + (u_1 + r_2 + u_2) + \dots + (-1)^n (u_{n-1} + r_n + u_n) \\ &= r_0 - r_1 + \dots + (-1)^n r_n = \text{右辺} \end{aligned}$$

位相空間 X に単体分割 (K, f) が与えられたとき、 K が有限なら X の Euler 数を $\chi(X) := \chi(K)$ と定める事が出来るが (このとき X はコンパクト), そうでない位相空間 X に対してもホモロジー群の階数が有限で、ある次元以上のホモロジー群が 0 ならば、この定理を用いて X の Euler 数の定義を右辺 (Betti 数の交代和) と定める事により拡張できる. ($\chi(X) := \sum_i (-1)^i \text{rank } H_i(X)$ と定義しなおす.)

標準基底を用いた計算例 標準基底を求めることによりホモロジー群を計算する.

元の基底が求めた基底の候補の一次結合で表せれば, その候補は基底になることに注意.

例 1.7.3 (三角形の周と三角形の和)

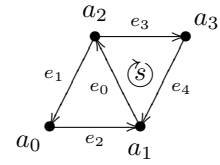
$K_0 = \{a_0 \sim a_3\}$ (頂点).

$s = a_1 a_2 a_3$, $e_0 = a_1 a_2$, $e_1 = a_2 a_0$, $e_2 = a_0 a_1$, $e_3 = a_2 a_3$, $e_4 = a_3 a_1$.

$K_1 = \{e_0 \sim e_4\}$ (辺), $K_2 = \{s\}$ (面). $K = \{a_0 \sim a_3, e_0 \sim e_4, s\}$. $\dim K = 2$.

$C_2 = \mathbb{Z}\langle s \rangle$, $C_1 = \mathbb{Z}\langle e_0 \sim e_4 \rangle$, $C_0 = \mathbb{Z}\langle a_0 \sim a_3 \rangle$.

$B_2 = 0$, $Z_2 = H_2$, $\partial a_i = 0$ ($\forall i$). $Z_0 = C_0$ は予め分かっている.



境界: (以下, $m, m_i \in \mathbb{Z}$.)

($n=2$): $\partial s = e_0 + e_3 + e_4$ ($\neq 0$). ($\partial m s = m \partial s = 0 \Leftrightarrow m = 0$.) $\therefore Z_2 = 0$, $\therefore H_2 = 0$. $B_1 = \mathbb{Z}\langle \partial s \rangle$.

($n=1$): $\partial e_0 = -a_1 + a_2$, $\partial e_1 = -a_2 + a_0$, $\partial e_2 = -a_0 + a_1$, $\partial e_3 = -a_2 + a_3$, $\partial e_4 = -a_3 + a_1$.

以上のデータを基に ホモロジー群を求める.

($n=1$): $B_1 = \mathbb{Z}\langle \partial s \rangle \subset Z_1$ は分かっている. Z_1 を求める.

$c = \sum_{i=0}^4 m_i e_i \in C_1 \Rightarrow \partial c = (m_1 - m_2)a_0 + (m_2 - m_0 + m_4)a_1 + (m_0 - m_1 - m_3)a_2 + (m_3 - m_4)a_3$.

$\partial c = 0 \Leftrightarrow$ 各 a_i の係数 $= 0$. $\therefore a_0 : m_1 = m_2$, $a_3 : m_3 = m_4$. $\therefore a_1 : m_1 - m_0 + m_3 = 0$, $a_2 : m_0 - m_1 - m_3 = 0$.

$\therefore m_0 = m_1 + m_3$. $\therefore \partial c = 0 \Leftrightarrow c = m_1(e_0 + e_1 + e_2) + m_3(e_0 + e_3 + e_4) = m_1(e_0 + e_1 + e_2) + m_3 \partial s$.

$z := e_0 + e_1 + e_2$ とおくと, $c \in Z_1 \Leftrightarrow c = m_1 z + m_3 \partial s$. $\therefore Z_1 = \mathbb{Z}\langle z, \partial s \rangle$. $\therefore H_1 = \mathbb{Z}\langle z, \partial s \rangle / \mathbb{Z}\langle \partial s \rangle = \mathbb{Z}\langle \bar{z} \rangle \cong \mathbb{Z}$.

$z, \partial s$ の $e_0 \sim e_4$ の係数は 1 なので (± 1 なら良い), z は e_0, e_1, e_2 の何れかと, ∂s は e_0, e_3, e_4 の何れかと置き換えても C_1 の基底になる. 即ち,

$$C_1 = \mathbb{Z}\langle \partial s, z, e_0, e_1, e_3 \rangle \quad (e_2, e_4 \text{ はこれらの } \mathbb{Z}\text{-係数の一次結合で表せる})$$

($e_2 = z - e_0 - e_1$, $e_4 = \partial s - e_0 - e_3$ で, $\{\partial s, z, e_0, e_1, e_3\}$ から $\{e_0 \sim e_4\}$ への $\mathbb{Z}$ 上の (逆) 変換が与えられる.)

$B_0 = \mathbb{Z}\langle \partial e_0, \partial e_1, \partial e_3 \rangle = \mathbb{Z}\langle -a_1 + a_2, -a_2 + a_0, -a_2 + a_3 \rangle$.

$$\therefore C_0 = \mathbb{Z}\langle a_2, \partial e_0, \partial e_1, \partial e_3 \rangle \quad (a_0 = a_2 + \partial e_1, a_1 = a_2 - \partial e_0, a_3 = a_2 + \partial e_3)$$

$\therefore H_0 = \mathbb{Z}\langle \bar{a}_2 \rangle \cong \mathbb{Z}$. 以上を総合すると,

$$H_n(K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0, 1) \\ 0 & (n \neq 0, 1) \end{cases}$$

尚, Z_1 の計算は次の様に (簡略化) してもよい.

• a_0 を含む ∂e_i は $\partial e_1, \partial e_2$ で, a_0 を消すには $\partial e_1 + \partial e_2$ (の整数倍) しかない.

$\partial e_1 + \partial e_2 = -a_2 + a_1 = -\partial e_0$ より $z := e_0 + e_1 + e_2$ は 1-cycle で, C_1 の基底の候補になり得る.

∂s と合わせて, $C_1 = \mathbb{Z}\langle \partial s, z, e_0, e_1, e_3 \rangle$ と基底を変換でき, e_0, e_1, e_3 の一次結合で cycle になるものは 0 のみ.

$\therefore \mathbb{Z}\langle \partial s, z, e_0, e_1, e_3 \rangle$ が C_1 の標準基底になる.

• 他の求め方として, $\partial_1 : C_1 \rightarrow C_0$ の表現行列を基本変形する方法がある. (但し, 基底の変換行列も同時に求めておかないと幾何学的意味が分かり難い.)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

これより $\text{rank } B_0 = 3$, $H_0 \cong \mathbb{Z}$ と $\text{rank } Z_1 = 2$ が分かる.