1.6 単体と球面のホモロジー群

単体 s が次に述べる錐体になることを利用して $K(s)$ のホモロジー群を求める.

定義 1.6.1 (錐体) 単体複体 K が **錐体 (cone)** $\longleftrightarrow$ 次の様な頂点 $a\in K_0$ がある :
$L:=\{s\in K\,|\,a\notin s\}$ とするとき，$s=a_0\cdots a_k\in L \implies as:=aa_0\cdots a_k\in K$
(L は部分複体になる.) a を錐体 K の**頂点**または**中心**という.（L は底面という.)

• n-単体 $s=a_0\cdots a_n$ ($n{>}0$) の単体的閉包 $K=K(s)$ は任意の頂点 a_i を錐体の頂点とする錐体. ($L=K(\partial^i s)$.)

定義 1.6.2 底面 L の chain $c=\sum_i m_is_i\in C_k(L)$ と錐体の頂点 $a\in K_0$ に対し，chain $ac\in C_{k+1}(K)$ を

$$ac\equiv a\left(\sum_i m_is_i\right):=\sum_i m_ias_i\in C_{k+1}(K)$$

で定義する.（一般には, $c=\sum_i m_is_i\in C_k(K)$, $\forall as_i\in K_{k+1}$ に対し, ac がこの式で定義できる.)

補題 1.6.1 $c=\sum_i m_is_i\in C_k(L)$ に対し，（一般には $c\in C_k(K)$, ${}^{\forall}as_i\in K_{k+1}$ に対し)

$$\partial\,(ac)=c-a\partial\,c \qquad (k\geqq 1)\quad \big(\partial\,(ac)=c-(\textstyle\sum_i m_i)a=:c-\epsilon(c)a\ \ (k=0)\big)$$

（ここで，$c=\sum_i m_ia_i\in C_0\Rightarrow \epsilon(c):=\sum_i m_i\in\mathbb{Z}$. $\epsilon:C_0\to\mathbb{Z}$ を添加写像 (augumentation) という.)

証明 $k>0$, $s=a_0\cdots a_k$ に対し，

$$\begin{aligned}\partial\,(as)&=\partial\,(aa_0\cdots a_k)=a_0\cdots a_k+\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i aa_0\cdots \overset{i\text{ 番目}}{\overset{\vee}{a_{i-1}}}\cdots a_k \quad (j=i{-}1\text{ とおくと})\\ &=s+\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j+1}a\,\partial^j s=s-\sum_{j=0}^{k}(-1)^j a\,\partial^j s=s-a\,\partial\,s\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \partial\,(ac)=\sum_i m_i\partial\,(as_i)=\sum_i m_i(s_i-a\partial\,s_i)=\sum_i m_is_i-a\left(\sum_i m_i\partial\,s_i\right)=c-a\partial\,c$$

($k=0$ のとき，$\partial\,(ac)=\sum_i m_i\partial\,(aa_i)=\sum_i m_i(a_i-a)=\sum_i m_ia_i-(\sum_i m_i)a=c-\epsilon(c)a.$)

命題 1.6.2 K が a を錐の頂点とする錐体なら

$$H_k(K)=0\quad(k\neq 0),\qquad (H_0(K)=\mathbb{Z}\langle a\rangle\cong\mathbb{Z})$$

証明 $L:=\{s\in K\,|\,a\notin s\}$ (底面), $k\geqq 1$ とし, $z\in C_k(K)$ を a を含む単体の chain ac とその他に分けて,

$$z=b+ac\qquad b\in C_k(L),\quad c\in C_{k-1}(L)$$

とする. $z\in Z_k(K)$ $(\therefore\ \partial\,(z)=0)$ のとき

$$\begin{aligned}&0=\partial\,z=\partial\,b+\partial\,(ac)=\partial\,b+c-a\partial\,c,\quad \partial\,b+c\in C_{k-1}(L),\quad a\partial\,c\notin C_{k-1}(L)\\ &\therefore\quad \partial\,b+c=0=a\partial\,c\quad \therefore\ c=-\partial\,b\quad (\partial\,c=-\partial\,\partial\,b=0)\\ &\therefore\quad z=b+ac=b-a\partial\,b=\partial\,(ab)\in B_k(K)\end{aligned}$$

よって $Z_k(K)=B_k(K)$ より $H_k(K)=Z_k(K)/B_k(K)=0$ $(k\neq 0)$.
($k=\dim K$ のときは, $z=ac$, $b=0$ となり $\partial\,z=0\Leftrightarrow c=0$. $\therefore\ z=ac=0$ より $Z_k=0$, $H_k=0$ となる.)
$k{=}0$ のとき， $z{=}b{+}ma$, $b{=}\sum_i m_ia_i\in C_0(L)$ と書けて，$\partial\,(ab){=}b-\epsilon(b)a$ ($\epsilon(b){=}\sum_i m_i$) より
$z{=}(m+\epsilon(b))a+\partial\,(ab)\equiv(m+\epsilon(b))a \mod B_0$. 特に $ma\in Z_0(K)$ $(\forall m\in\mathbb{Z})$ より $H_0(K){=}\mathbb{Z}\langle a\rangle\cong\mathbb{Z}$.

定理 1.6.3 単体 s のホモロジー群は ($K(s)$ を s の単体分割と考えて)

$$H_k(s)=\begin{cases}0 & (k\neq 0)\\ \mathbb{Z} & (k=0)\end{cases}$$

$(n{+}1)$-単体 s に対し，$\partial K(s) := K(s) - \{s\}$ とおくと $\partial K(s)$ は $K(s)$ の部分複体になり, 多面体 $|\partial K(s)|$ は n 次元球面 S^n と同相なので, $\partial K(s)$ は S^n の単体分割になる．これを利用して球面のホモロジー群を求める．

(同相写像 $f : |\partial K(s)| \to S^n$ は b を s の重心 (内点で良い) とするとき $f(x) := (x{-}b)/\|x{-}b\|$.)

定理 1.6.4 n 次元球面 S^n のホモロジー群は ($\partial K(s)$ を S^n の単体分割と考えて)

$$n>0 \text{ のとき } H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (k=0,n) \\ 0 & (k \neq 0,n) \end{cases}, \qquad n=0 \text{ のとき } H_k(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases}$$

証明 $n>0$ とする．$(n{+}1)$-単体 s に対し，$K = K(s)$，$K' = \partial K(s)$,

$C_k = C_k(K),\ Z_k = Z_k(K),\ B_k = B_k(K),\ \ C'_k = C_k(K'),\ Z'_k = Z_k(K'),\ B'_k = B_k(K')$

とおくと，$K' = K - \{s\}$ より

$C'_k = C_k\ (k \leqq n),\quad C'_{n+1} = 0,\ \ C_{n+1} = \mathbb{Z}\langle s\rangle.$

$\therefore\ Z'_k = Z_k\ (k \leqq n),\ \ B'_k = B_k\ (k<n),\ \ B'_n(=\partial\,(C'_{n+1})) = 0,\ \ B_n(=\partial\,(C_{n+1}) = \partial\,(\mathbb{Z}\langle s\rangle)) = \mathbb{Z}\langle\partial\,s\rangle$

$H_k(K) = 0\ (n>0)$ より $Z_k = B_k\ (1 \leqq k \leqq n)$．よって,

$1 \leqq k < n$ のとき $Z'_k = Z_k = B_k = B'_k$ 　より $H_k(K') = 0$

$k=n$ のとき $Z'_n = Z_n = B_n = \mathbb{Z}\langle\partial\,s\rangle,\quad B'_n = 0$ 　より $H_n(K') = Z'_n = \mathbb{Z}\langle\partial\,s\rangle \cong \mathbb{Z}$

$Z'_0 = Z_0,\ B'_0 = B_0$ より $H_0(K') = H_0(K) \cong \mathbb{Z}$. 以上で S^n $(n{>}0)$ のホモロジー群が求まった.

$S^0 = 2$ 点 $= \{-1,1\} =: \{a,b\} =: K$ のホモロジー群は, $C_0 = \mathbb{Z}\langle a,b\rangle,\ \ C_k = 0\ (k{\neq}0)$ より,

$Z_0 = C_0,\ Z_k = C_k = 0,\ B_0 = 0.\ \therefore\ H_0(K) = Z_0 = C_0 = \mathbb{Z}\langle a,b\rangle \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z},\ \ H_k(K) = 0\ (k{\neq}0).$