

1.4 chain complex とホモロジー群

• 以下, 単体複体 K の各単体には (任意に) 順序, 向きが与えられているとする.

chain, 境界 単体複体 K の n -単体の集合 K_n で生成される自由加群 $\mathbb{Z}\langle K_n \rangle$ を $C_n(K)$ と表す. この元 $c = \sum_{i=1}^k m_i[s_i]$, ($m_i \in \mathbb{Z}$, $s_i \in K_n$) を n 次元 **chain** (チェイン, 鎖) 略して n -chain といい, $C_n(K)$ を n -鎖群 (chain group, group of n -chains) という. ここで $[s]$ の (-1) 倍と, $[s]$ の逆向きの単体 $-[s]$ は同一視しておく.

$$C_n(K) := \mathbb{Z}\langle K_n \rangle \ni c = \sum_{i=1}^k m_i[s_i] \quad (m_i \in \mathbb{Z}, s_i \in K_n), \quad (-1)[s] = -[s]$$

各有向単体 $[s]$ ($s \in K_n$) に, 向き付けられた境界 $\partial[s]$ を対応させる準同型 $\partial = \partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$

$$\partial[s] = \partial_n[s] := \sum_{i=0}^n (-1)^i [\partial^i s] \quad \left(\because \partial \left(\sum_{j=1}^k m_j [s_j] \right) = \sum_{j=1}^k m_j \partial[s_j] \right)$$

を境界作用素 (boundary operator) という. (differential (微分) ともいう.)

(これも代表元 s の取り方によらず定まり $\partial(-[s]) = -\sum_{i=0}^n (-1)^i [\partial^i s]$.)

但し, $n < 0$ のとき $C_n(K) = C_n(\emptyset) = 0$, $\partial_n = 0$, $\partial_0 = 0$.

命題 1.4.1 (境界作用素 ∂ の性質) $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0 : C_n(K) \rightarrow C_{n-2}(K)$ ($n \in \mathbb{Z}$)

($\because$) 順序単体 $s = a_0 a_1 \cdots a_n$ に対し, $i \leq j$ のとき

$$(*) \quad \partial^j \partial^i s = \partial^j (a_0 \cdots \check{a}_i \cdots a_n) = a_0 \cdots \check{a}_i \cdots \check{a}_{j+1} \cdots a_n = \partial^i \partial^{j+1} s.$$

これより

$$\begin{aligned} \partial \partial[s] &= \partial \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \partial^i [s] \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial (\partial^i [s]) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \partial^j \partial^i [s] \right) \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j} \partial^j \partial^i [s] + \sum_{0 \leq i \leq j \leq n-1} (-1)^{i+j} \partial^j \partial^i [s]. \quad (\text{添字の範囲に注意}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{上の } (*) \text{ より 第 2 項} &= \sum_{0 \leq i \leq j \leq n-1} (-1)^{i+j} \partial^i \partial^{j+1} [s] \quad (k = j+1 \text{ において}) \\ &= \sum_{0 \leq i < k \leq n} (-1)^{i+k-1} \partial^i \partial^k [s] \quad (i \text{ を } j \text{ に, } k \text{ を } i \text{ におきかえて}) \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq n} (-1)^{i+j-1} \partial^j \partial^i [s] = (-1)(\text{第 1 項}) \end{aligned}$$

より $\partial \partial[s] = 0$. □

注意 1.4.1 (例えば全頂点が番号付けられているときの様に,) 単体複体 K の頂点の集合 K_0 に, 各単体上では全順序となる順序が与えられたとき K を **順序単体複体** (ordered simplicial complex) という. このとき K の各単体に一斉に順序が与えられていることになり, $C_n(K)$ は順序 n -単体で生成された自由加群で, $\partial_n s = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial^i s$ とみなせる. (このことは後に述べる特異ホモロジー群と関連する.)

chain complex 加群と準同型の列:

$$C = \{C_n, \partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}} = \{\cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots\}$$

が $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ ($\forall n \in \mathbb{Z}$) をみたすとき, $C = \{C_n, \partial_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を **chain complex** (鎖複体) という.

$Z_n = Z_n(C) := \text{Ker} [\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}]$, $B_n = B_n(C) := \text{Im} [\partial_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n]$ の元 $z \in Z_n$, $b \in B_n$ をそれぞれ n -次元 **cycle** (サイクル, 輪体), **boundary** (バウンダリー, 境界, 境界輪体) (略して n -cycle, n -boundary) と言い, Z_n, B_n は輪体群 (group of n -cycles), 境界輪体群 (group of n -boundaries) といわれる. $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ より

$$B_n(C) = \text{Im} \partial_{n+1} \subset \text{Ker} \partial_n = Z_n(C) \subset C_n$$

この剰余群 $Z_n(C)/B_n(C)$ を chain complex C の n -次元**ホモロジー群** (homology group) といい $H_n(C)$ と表す:

$$H_n(C) := Z_n(C)/B_n(C) = \text{Ker} \partial_n / \text{Im} \partial_{n+1}$$

cycle $z \in Z_n$ の剰余類 $z + B_n \in H_n(C)$ を z の**ホモロジー類** (homology class) といい $[z]$ と表す. $[z] = [z']$, 即ち $z - z' \in B_n \Leftrightarrow \exists c \in C_{n+1} (z - z' = \partial c)$ のとき z と z' は **homologous** という. (ホモロークともいう.)

(加群と準同型の列 $C^* = \{\cdots \rightarrow C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C_n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \rightarrow \cdots\}$, $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$ は cochain complex, $Z^n = \text{Ker} \delta^n$, $B^n = \text{Im} \delta^{n-1}$ の元は, cocycle, coboundary, $H^n(C^*) := Z^n/B^n$ はコホモロジー群といわれる.)

1.5 単体複体のホモロジー群

単体複体 K に対し, $C(K) := \{C_n(K), \partial_n\}$ は命題 1.4.1 より chain complex になる. このホモロジー群 $H_n(C(K))$ を K の (整係数) n 次元ホモロジー群といい, $H_n(K)$ (詳しくは $H_n(K : \mathbb{Z})$) と表す:

$$H_n(K) = H_n(K : \mathbb{Z}) := H_n(C(K)) = Z_n(K)/B_n(K) = \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1}$$

位相空間 X に単体分割 (K, f) が与えられたとき, X の n 次元ホモロジー群を $H_n(X) := H_n(K)$ で定める.

(X のホモロジー群が単体分割の取り方によらないこと, および任意の位相空間に対してホモロジー群を定義することは後述の特異ホモロジー群を用いて示される.)

定義より: 一般に, m 次元単体複体 K に対し, $n > m$, $n < 0$ のとき $K_n = \emptyset$, $C_n(K) = 0$ より $\partial_{m+1} = 0$, $\partial_0 = 0$ で,

$$B_m(K) = 0 \quad \therefore H_m(K) = Z_m(K), \quad Z_0(K) = C_0(K). \quad n > m \text{ 又は } n < 0 \text{ のとき } H_n(K) = 0.$$

• 以下, K を定めたときは C_n , Z_n , B_n , H_n などと略記する.

例 1.5.1 (chain, cycle の例 1) $n=1$: 向きを付けた折れ線 (曲線) (図)

$a_0a_1, a_1a_2, \dots, a_{n-1}a_n$ ($a=a_0, b=a_n$) に対し chain $c = a_0a_1 + a_1a_2 + \dots + a_{n-1}a_n$ は折れ線 (曲線) 全体を表し, その境界は $\partial[a_{i-1}a_i] = -a_{i-1} + a_i$ より

$$\partial c = (-a_0 + a_1) + (-a_1 + a_2) + \dots + (-a_{n-1} + a_n) = -a_0 + a_n = b - a$$

特に有向閉曲線 (閉折れ線) は $a=b$ より $\partial c = 0$ 即ち 1-cycle になる.

また, $a \neq b$ のときは $b-a = \partial c \in B_0$ より $[a] = [b] \in H_0$.

例 1.5.2 (同じ向きの単体からなる 2-chain) (図), その有向境界は向きを付けた周を表す. 特に 3 角形分割された有向閉曲面は 2-cycle を表す. また, 境界がある場合は成分が 1 つのときはホモロジー類として 0 で, 2 つのときは一方の境界の向きを逆にしたものともう一方がホモロジー類として同じであることを表す.

例 1.5.3 (一点, 1-単体, 2-単体のホモロジー群) (以下, $m, m_i \in \mathbb{Z}$.)

$s=a$, $K = \{a\}$ (一点) $C_0 = \mathbb{Z}\langle a \rangle$, $C_n = 0$ ($n \neq 0$), $\partial_n = 0$ ($\forall n$), $H_0(K) = C_0 = Z_0 = \mathbb{Z}\langle a \rangle$, $H_n = 0$ ($n \neq 0$).

$s=a_0a_1$, $K = K(s) = \{a_0, a_1, s\}$, $C_0 = \mathbb{Z}\langle a_0, a_1 \rangle$, $C_1 = \mathbb{Z}\langle s \rangle$, $C_n = 0$ ($n \neq 0, 1$). $\partial_1 s = -a_0 + a_1$, $\partial_n = 0$ ($n \neq 1$).

$Z_1 = 0$ ($\partial_1 ms = 0 \Leftrightarrow m = 0$), $H_1 = Z_1 = 0$, $B_0 = \mathbb{Z}\langle \partial_1 s \rangle$, $Z_0 = C_0 = \mathbb{Z}\langle a_0, -a_0 + a_1 \rangle = \mathbb{Z}\langle a_0, \partial_1 s \rangle$,

$H_0 = Z_0/B_0 = \mathbb{Z}\langle a_0, \partial_1 s \rangle / \mathbb{Z}\langle \partial_1 s \rangle = \mathbb{Z}\langle [a_0] \rangle \cong \mathbb{Z}$. $H_n = 0$ ($n \neq 0$).

$s=a_0a_1a_2$, $e_0 := a_1a_2$, $e_1 := a_2a_0$, $e_2 := a_0a_1$, $K = K(s) = \{a_0, a_1, a_2, e_0, e_1, e_2, s\}$.

$C_2 = \mathbb{Z}\langle s \rangle$, $C_1 = \mathbb{Z}\langle e_0, e_1, e_2 \rangle$, $C_0 = \mathbb{Z}\langle a_0, a_1, a_2 \rangle$, $C_n = 0$ ($n \neq 0, 1, 2$).

($n=2$): $\partial s = e_0 + e_1 + e_2$ ($\neq 0$) ($\partial ms = m\partial s = 0 \Leftrightarrow m=0$). $\therefore Z_2 = 0$, $\therefore H_2 = 0$. $B_1 = \mathbb{Z}\langle \partial s \rangle$.

($n=1$): $\partial e_0 = -a_1 + a_2$, $\partial e_1 = -a_2 + a_0$, $\partial e_2 = -a_0 + a_1$.

$c = \sum_i m_i e_i \implies \partial c = \sum_i m_i \partial e_i = m_0(-a_1 + a_2) + m_1(-a_2 + a_0) + m_2(-a_0 + a_1)$
 $= (m_1 - m_2)a_0 + (m_2 - m_0)a_1 + (m_0 - m_1)a_2$. $\partial c = 0 \Leftrightarrow$ 各 a_i の係数 $= 0$. $\therefore m_0 = m_1 = m_2 =: m$.

$\therefore c \in Z_1 \Leftrightarrow c = m(e_0 + e_1 + e_2) = m\partial s$. $\therefore Z_1 = \mathbb{Z}\langle \partial s \rangle = B_1$, $\therefore H_1 = Z_1/B_1 = 0$.

$B_0 = \mathbb{Z}\langle \partial e_0, \partial e_1, \partial e_2 \rangle = \mathbb{Z}\langle \partial e_1, \partial e_2 \rangle = \mathbb{Z}\langle -a_2 + a_0, -a_0 + a_1 \rangle$, $Z_0 = C_0 = \mathbb{Z}\langle a_0, -a_2 + a_0, -a_0 + a_1 \rangle = \mathbb{Z}\langle a_0, \partial e_1, \partial e_2 \rangle$.

$\therefore H_0 = Z_0/B_0 = \mathbb{Z}\langle [a_0] \rangle \cong \mathbb{Z}$. $H_n = 0$ ($n \neq 0$).

単体複体 K が連結 $\Leftrightarrow$ 任意の頂点 $a, b \in K_0$ ($a \neq b$) は辺 (=1-単体) の列で結べる, 即ち, $a_0 = a$, $a_n = b$ となる 1-単体の有限列 $a_0a_1, a_1a_2, \dots, a_{n-1}a_n$ が存在する, 言い換えると $\partial c = b - a$ となる 1-chain $c = \sum_{i=1}^n a_{i-1}a_i$ が存在するときをいう. これは多面体 $|K|$ が位相空間として連結と同値. ($a \neq b$ のとき, 長さ (= 上の n) 最小の chain c では $a_i \neq a_j$ ($i \neq j$) になる.)

単体複体の連結成分 L は部分複体で, 多面体 $|L|$ が $|K|$ の連結成分になるものとする.

例 1.5.4 連結単体複体 K では $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

(上の注意より $Z_0(K) = C_0(K)$. 即ち任意の 0-chain (特に頂点) は cycle.)

($\therefore$) 頂点 $a \in K_0$ を一つ定める. このとき $\forall b \in K_0$ に対し $\partial c_b = b - a$ となる 1-chain c_b が存在するので $[a] = [b]$.

$\therefore$ 任意の 0-cycle $c = \sum_i m_i a_i$ に対し $[c] = \sum_i m_i [a_i] = (\sum_i m_i) [a] = m[a]$ ($m := \sum_i m_i \in \mathbb{Z}$).

