1.2 単体 (的) 複体 (simplicial complex)

(Euclid) 単体のある集合 $K(\neq \emptyset)$ が (Euclid) **単体 (的) 複体** (simplicial complex) であるとは次の条件を満たすとき：
(S1) $s \in K,\ s' \leqq s \implies s' \in K$ (K の単体 s の部分単体 s' は K の単体．)
(S2) $s, s' \in K,\ s \cap s' \neq \emptyset \implies s \cap s' \leqq s, s'$ ($\therefore\ s \cap s' \in K$)
(K の単体 s, s' の共通部分 $s \cap s'(\neq \emptyset)$ は s と s' の **一つの**部分単体 (で，(S1) より K の一つの単体).
(S3) (局所有限性) ($\bigcup_{s \in K} |s| \subset \mathbb{R}^N$ とするとき)
$\forall x \in \forall s \in K$ に対し $\#\{s \in K \mid s \cap U \neq \emptyset\} < \infty$ となる x の近傍 $U \subset \mathbb{R}^N$ が存在.

単体複体 K に対し，$\mathbb{R}^N$ の部分空間

$$|K| := \bigcup_{s \in K} |s| \subset \mathbb{R}^N$$

を K の (覆う) **多面体** (polyheadron) といい， K を $|K|$ の **単体分割** (又は三角形分割 (triangulation)) という．
$K, |K|$ の **次元** $\dim K = \dim |K|$ を K に属する単体の最大次元と定める:

$$\dim K = \dim |K| := \max_{s \in K} \dim s$$

位相空間 X に対し，単体複体 K と多面体 $|K|$ からの同相写像 $f : |K| \xrightarrow{\approx} X$ が与えられたとき，(K, f) を X の **単体分割**といい， X に単体分割が存在するとき X は**単体分割可能**という．

(単体分割の図)

注 1.2.1 (S3) は $|K|$ が複雑にならない為の条件.

注 1.2.2 単体分割可能な位相空間空間も単体分割を持たない空間も沢山ある．単体分割可能な空間は「きれいな」空間と言える．

定理 1.2.1 可微分多様体は単体分割可能．(証明は複雑なので略す.)

単体複体 K の部分集合 L が K の (単体的) **部分複体** (subcomplex) であるとは，L がそれ自体単体複体になっているときを言う． これは L が (S1: $s \in K,\ s' \leqq s \Rightarrow s' \in K$) をみたすことと同値．((S2, S3) は自動的にみたされる．)

例 1.2.1 (単体複体の切片) 単体複体 K に対し，

$$K_n := \{s \in K \mid \dim s = n\}\ (K \text{ の } n\text{-単体全体}), \quad K^n := \{s \in K \mid \dim s \leqq n\} = \bigcup_{i=0}^{n} K_n$$

とおくとき， K^n は (S1) をみたし部分複体になる．これを K の n-**切片** (n-骨格，n-skeleton) という．

例 1.2.2 (単体的閉包) n-単体 s と 単体複体 K の部分集合 S に対し，それぞれ

$$K(s) := \{s' \mid s' \leqq s\}, \qquad K(S) := \{s' \mid s' \leqq s \in S\} = \bigcup_{s \in S} K(s)$$

とすると $K(s)$ は s の単体分割，$K(S)$ は K の部分複体になる．これらを s, S の **単体的閉包**という．

$$\partial K(s) := K(s) - \{s\}, \qquad \partial |s| = \bigcup_{i=0}^{n} |\partial^i s|$$

とおくと, $\partial K(s)$ は単体 $|s|$ の (幾何) 境界 $\partial |s|$ の単体分割になる．$\partial |s|$ は $(n{-}1)$ 次元球面 S^{n-1} と同相なので $\partial K(s)$ は S^{n-1} の単体分割になっている．(同相写像 $f : \partial |s| \to S^{n-1}$ は, b を $|s|$ の重心とするとき, $f(x) := (x{-}b)/\|x{-}b\|$.)

単体複体 K が **有限**であるとは K が有限集合のときをいう．これは頂点の集合 K_0 が有限であることと同値.

- 以下, 主として有限単体複体について考える．

注意 1.2.1 (抽象単体複体) (頂点の) 集合 V と次をみたす V の有限部分集合族 K ($\subset \{s \in 2^V \mid 1 \leqq \#s < \infty\}$) が与えられたとき $K = (K, V)$ を単体複体という:
(0) $a \in V \Rightarrow \{a\} \in K$. (1) $s \in K,\ s' \subset s \Rightarrow s' \in K$.
以下 $a \in V$ と $\{a\} \in K$ を同一視する．$a \in V$ $(= \{a\})$ を K の**頂点** (vertex)， $s \in K$ を**単体**,
$s = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$, $\#s = n{+}1$ のとき s を n-**単体**という．$K_n := \{s \in K \mid \#s = n{+}1\}$ を K の n-単体全体の集合とする． $s' \subset s \in K$ のとき s' を s の**部分単体**という．((1) より $s' \in K$.) また, (0) は $V = K_0$ と表され，$\emptyset \notin K$.

1.3　加群の直積と直和

直積，直和の構成的定義　集合 S を添え字集合とする群の系 $(G_s\,|\,s\in S)$ の **直積** は集合の直積に成分ごとの積を入れたものとして定義される ($e, e_s\in G_s$ を単位元とする) :

$\prod_{s\in S}G_s := \Big\{g:S\to\bigcup_{s\in S}G_s \;\Big|\; g(s)=g_s\in G_s\Big\}$,　$(gg')(s)=g(s)g(s')=g_sg'_s$,　$e(s)=e_s$,　$g^{-1}(s)=g(s)^{-1}=g_s^{-1}$

($g=(g_s)$ と表される.) 標準全射 (射影)　$p_t:\prod_{s\in S}G_s\to G_t$,　$p_t(g):=g(t)=g_t$　は準同型.

直和 は直積の部分群で

$$\bigoplus_{s\in S}G_s := \Big\{g\in\prod_{s\in S}G_s \;\Big|\; g(s) \text{ は有限個の } s \text{ を除き } g(s)=e_s\Big\}$$

これより，S が有限集合のとき「直和＝直積」で，特に $S=\{1,2,\dots,n\}$ のとき

$$G_1\oplus\cdots\oplus G_n = G_1\times\cdots\times G_n \ni g=(g_1,\dots,g_n)$$

標準単射 (入射)　$i_t:G_t\to\bigoplus_{s\in S}G_s$　$i_t(g_t)=g$, $g(t):=g_t$, $g(s):=e_s$ $(s\neq t)$ は準同型.

特に, $G_s=G$ $(\forall s{\in}S)$ のとき 直積は (S から G への写像全体で) G^S と表し, 直和は $\bigoplus_{s\in S}G$, $G^{\oplus S}$ などと表される. (尚, $S=\emptyset$ のとき $G^{\emptyset}=\{e\}=G^{\oplus\emptyset}$.)

加群 ($\mathbb{Z}$-加群) ＝加法群＝可換群で演算は和，単位元を 0, 逆元を $-g$ で表したもの．$\mathbb{Z}$ の作用を次で定める：

$g\in G$,　$n\in\mathbb{Z}$ に対し $ng\in G$ を

$$ng := \begin{cases} g+\cdots+g & (n \text{ 個の和}) & n>0 \\ 0 & & n=0 \\ (-g)+\cdots+(-g) & (|n| \text{ 個の和}) & n<0 \end{cases}$$

以下加群のみを考える:

自由加群　集合 S に対し ($G_s{=}G{=}\mathbb{Z}$ $(s{\in}S)$ として) 直和 $\bigoplus_{s\in S}\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}\langle S\rangle$ と表す:

$$\mathbb{Z}\langle S\rangle := \bigoplus_{s\in S}\mathbb{Z} = \{g:S\to\mathbb{Z}\,|\,g(s){\neq}0 \text{ なる } s \text{ は有限個 }\}$$

これを S の**生成**する (S を基底とする) **自由 ($\mathbb{Z}$-) 加群**という. (尚, $\mathbb{Z}\langle\emptyset\rangle=\{0\}$．以下, $\{0\}$ も 0 と表す.)

$s{\in}S$ に対し $s^*\in\mathbb{Z}\langle S\rangle$ を，$s^*(s'):=\begin{cases}1 & s'=s\\ 0 & s'\neq s\end{cases}$ と定めると，$\forall g\in\mathbb{Z}\langle S\rangle$ は

$\{s{\in}S\,|\,g(s)\neq 0\}=\{s_1,\dots,s_k\}$ とするとき $s_1^*,\dots,s_k^*$ の ($\mathbb{Z}$ 係数の) 一次結合で表せる:

$$g=g(s_1)s_1^*+\cdots+g(s_k)s_k^*=\sum_{i=1}^k g(s_i)s_i^* \quad \Big(\Leftrightarrow g(s)=\sum_{i=1}^k g(s_i)s_i^*(s)\ (\forall s{\in}S)\Big)$$

($\because$)　$s{\neq}s_1,\dots,s_k\Rightarrow$ 両辺$=0$,　$s{=}s_j\Rightarrow$ 左辺 $=g(s_j)$, 右辺 $=g(s_j)s_j^*(s_j)=g(s_j)$ ($\because s_i^*(s_j){=}\delta_{ij}$).　□

また，$\sum_{i=1}^k m_is_i^*=0$ $(m_i{\in}\mathbb{Z})\Rightarrow\forall m_i=0$. (一次独立性)

ここで s^* を改めて s と表す (対応 $s\leftrightarrow s^*$ により両者を同一視する) と, $S\subset\mathbb{Z}\langle S\rangle$ とみなされ, $\mathbb{Z}\langle S\rangle$ は S の元の ($\mathbb{Z}$-係数の) 一次結合全体とみなされる:

$$\mathbb{Z}\langle S\rangle=\{m_1s_1+\cdots+m_ks_k \text{ (有限和)}\,|\,m_i{\in}\mathbb{Z}, s_i{\in}S\},\quad S\subset\mathbb{Z}\langle S\rangle$$

但し $\mathbb{Z}\langle\emptyset\rangle=\{0\}$. ($\mathbb{Z}$ を可換環 R に置き換えれば 自由 R-加群 $R\langle S\rangle$ が得られる.)

補題 1.3.1 加群 M に対し, 写像 $f:S{\to}M$ は準同型 $\tilde f:\mathbb{Z}\langle S\rangle{\to}M$ に次式により一意的に拡張される:

$$\tilde f\Big(\sum_{i=1}^k m_is_i\Big):=\sum_{i=1}^k m_if(s_i) \qquad (\tilde f|_S=f), \qquad \mathrm{Map}(S,M)\cong\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\langle S\rangle,M).$$

この対応 $f\leftrightarrow\tilde f$ は 1 対 1.　(以下, 準同型 $f:\mathbb{Z}\langle S\rangle{\to}M$ は $f(s)\in M$ を定める事により定義される.)

(注)　一般に, R-加群 G の部分集合 $S\subset G$ が G の**基底** (又は基) とは,

(1) S は G の**生成系**, 即ち　$\forall g\in G$ は　$g=r_1s_1+\cdots+r_ks_k$　$(r_i{\in}R, s_i{\in}S)$　と表せる.

(2) S は R 上**一次独立**, 即ち　$r_1s_1+\cdots+r_ks_k=0$ $\Rightarrow\forall r_i=0$.

をみたすときを言い, 基底が存在するとき G を自由 R-加群 (R 上の自由加群) という.

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[d, "p_s"] \\ H \arrow[ur, "\exists_1 f"] \arrow[r, "f_s"'] & G_s \end{tikzcd}$$

補足 (直積，直和の普遍性による定義)　$G=(G,\ p_s:G{\to}G_s\ (s{\in}S))$ が $(G_s\,|\,s{\in}S)$ の **直積** とは, 任意の群 (対象) H からの準同型の系 (射の系) $f_s:H\to G_s$ $(s{\in}S)$ に対し, $p_s{\circ}f=f_s$ $(\forall s)$ をみたす準同型 (射) $f:H\to G$ が**唯一存在**するときをいう．この様な G は普遍性による同型を除き一意的.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, "\exists_1 f"] & \\ G_s \arrow[u, "i_s"] \arrow[r, "f_s"'] & H \end{tikzcd}$$

双対的に，$G=(G,\ i_s:G_s{\to}G\ (s{\in}S))$ が $(G_s\,|\,s{\in}S)$ の **直和** とは, 任意の群 H への任意の準同型の系 $f_s:G_s\to H$ $(s{\in}S)$ に対し, $f{\circ}i_s=f_s$ $(\forall s)$ をみたす準同型 $f:G\to H$ が**唯一存在**するときをいう．これも普遍性により定まる同型を除き一意的で, 上で構成したものはこれらを満たしており,

s を生成元とする自由加群を $\mathbb{Z}\langle s\rangle$ と書けば　$\mathbb{Z}\langle S\rangle=\oplus_{s\in S}\mathbb{Z}\langle s\rangle$ とも表せる.