1 単体複体のホモロジー群

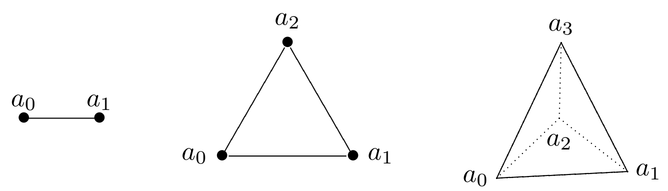
1.1 単体 (simplex)

Euclid 空間は $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \cdots \subset \mathbb{R}^N$ $(x = (x, 0))$ と見なし, N は十分大としておく.
線分, 三角形, 四面体の一般化として 単体を定義する.
$\mathbb{R}^N$ の $(n{+}1)$ 個の点 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ について, ベクトル $\overrightarrow{a_0a_1}, \overrightarrow{a_0a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_0a_n}$ が一次独立のとき, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ は **独立** である, または**一般の位置** にあるという. このとき $\mathbb{R}^N$ の部分空間

$$|s| = |a_0a_1 \cdots a_n| = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i a_i \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \forall t_i \geqq 0,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^N$$

を, **頂点** (vertex) $a_0, a_1, \cdots, a_n$ の張る n-次元 **Euclid 単体**, または n-次元 **幾何単体**, 略して **Euclid n-単体**, **幾何 n-単体**, または単に **n-単体** という.

例 1.1.1 0-単体 = 一点 a_0. 1-単体 = 線分 a_0a_1. 2-単体 = 三角形 $a_0a_1a_2$. 3-単体 = 四面体 $a_0a_1a_2a_3$.



順序 n-単体 (ordered n-simplex) = n-単体 $|s|$ の頂点 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ に全順序を与えたもの.

$$s = a_0a_1 \cdots a_n$$

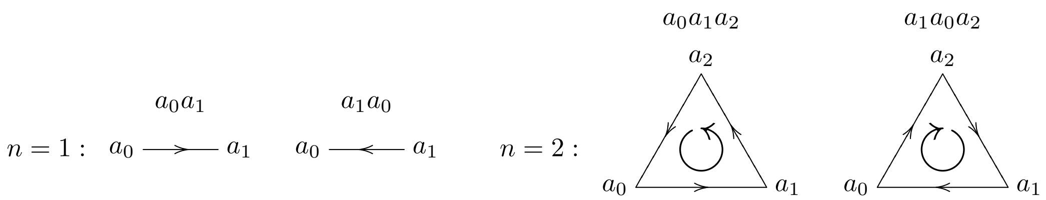
で, この順序を与えた順序 n-単体を表す. 頂点の順序を忘れて位相空間と考えたものが Euclid 単体 $|s| = |a_0a_1 \cdots a_n| = |a_1a_0 \cdots a_n|$. s の点 $x = \sum_{i=0}^{n} t_i a_i$ に対し $(t_0, t_1, \ldots, t_n) \in [0,1]^{n+1}$ を x の **重心座標** という.
$e_0{=}(1,0,\ldots)$, $e_1{=}(0,1,0,\ldots), \cdots$ を基本ベクトルとするとき, 順序 n-単体 $\Delta^n = e_0e_1 \cdots e_n$ を **標準 n-単体** (standard n-simplex) という. $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の重心座標は $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ ($\mathbb{R}^{n+1}$ における座標に一致).

単体の向き (orientation) $n \geqq 1$ のとき,
順序 n-単体 $s = a_0a_1 \cdots a_n$ の頂点の順序を変えたもの $s_\sigma = a_{\sigma(0)} \cdots a_{\sigma(n)}$, ($\sigma$ は置換) 全体の集合 (全部で $(n+1)!$ 個ある) 上の同値関係を「s_σ と s_τ は偶置換で移りあうとき同値」と定め, この同値類 $[s_\sigma]$ を幾何単体 $|s|$ の**向き**という. $|s|$ の向きは $[s] = [a_0a_1 \cdots a_n]$ と $[a_1a_0a_2 \cdots a_n]$ の 2 つ.
$[s_\sigma] = [s_\tau]$ ($\sigma\tau^{-1}$ は偶置換) のとき「$[s_\sigma]$ と $[s_\tau]$ は **同じ向き**」という.
$[s_\sigma] \neq [s_\tau]$ ($\sigma\tau^{-1}$ は奇置換) のとき「$[s_\sigma]$ と $[s_\tau]$ は **逆向き**」といい, $[s_\sigma]$ を $-[s_\tau]$ と表す. 従って,

$$[s_\sigma] = (\operatorname{sgn}\sigma)[s] \qquad (\operatorname{sgn}\sigma \text{は置換の符号}).$$

$[s]$ を **有向 n-単体** または, **向き付けられた n-単体** (oriented n-simplex) という.
$n = 0$, $s = a$ のときは順序は一意的. 形式的に $-a$ を考え, 逆向きとする.

例 1.1.2 n=1, $[s] = s = a_0a_1$ は有向線分 $a_0 \cdot \to \cdot a_1$ と考えられる. 逆向きは $-[s] = a_1a_0 = a_0 \cdot \leftarrow \cdot a_1$.
n=2 のとき, $[s] = [a_0a_1a_2] = [a_1a_2a_0] = [a_2a_0a_1]$, $-[s] = [a_1a_0a_2] = [a_0a_2a_1] = [a_2a_1a_0]$.



• 以下 $s = a_0a_1 \cdots a_n$ で, 文脈により適宜, 順序 n-単体, 有向 n-単体, Euclid n-単体 のいずれかを表すことにし, 総称して **n-単体**, 又は単に**単体**ということにする. (始めのうちは明示する.)

単体の部分単体 (face, 辺単体, 面単体) n-単体 $|s| = |a_0 a_1 \cdots a_n|$ の頂点の部分集合 $\{a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}\}$ は独立であり, k-単体 $|s'| = |a_{i_0} a_{i_1} \cdots a_{i_k}|$ を張る. (幾何単体, 順序単体, 有向単体で共通に) s' を s の k 次元 **部分単体** (subsimplex) あるいは **k-face** (k 次元辺, 又は k 次元面）といい

$$s' \leqq s \qquad (s' \leqq s \text{ かつ } |s'| \neq |s| \text{ のときは } s' < s)$$

と表す. 特に 順序単体 s の $(n-1)$ 次元部分単体は s から各頂点 a_i を除いた次の $n+1$ 個：

$$\begin{aligned} \partial^0 s &= \partial_n^0 s := a_1 \cdots a_n, \\ \partial^i s &= \partial_n^i s := a_0 \cdots \check{a}_i \cdots a_n, \qquad (0 \text{ 番目から数えて } i \text{ 番目の頂点 } a_i \text{ を省く}) \\ \partial^n s &= \partial_n^n s := a_0 \cdots a_{n-1} \end{aligned}$$

$\partial^i s$ を順序単体 s の**第 i-face** (第 i-辺 または第 i-面）と呼ぶ.

- 初等幾何の用語通り, 0 次元単体を頂点 (vertex), 1 次元単体を辺 (edge), 2 次元単体を面 (face) という.

ここでは 用語「face」は $(n-1)$ 次元部分単体と 2 次元の単体にのみ用いることにする.

face に誘導された向き 有向 n-単体 $[s] = [a_0 a_1 \cdots a_n]$ の face $|\partial^i s| = |a_0 \cdots \check{a}_i \cdots a_n|$ の向き

$$(-1)^i [\partial^i s] = (-1)^i [a_0 \cdots \check{a}_i \cdots a_n]$$

を $[s]$ から $\left|\partial^i s\right|$ に **誘導された向き**という.
順序 k-単体 $s' = a_0 \cdots a_k$ と頂点 b が $(k+1)$-単体 $b a_0 \cdots a_k$ を張るとき, この順序単体を bs' と書くと,

$$(-1)^i [a_i \partial^i s] = [s]$$

が成り立つ. 実際,

$$(-1)^i [a_i \partial^i s] = (-1)^i [a_i a_0 \cdots \check{a}_i \cdots a_n] = (-1)^i (-1)^i [a_0 \cdots a_i \cdots a_n] = [s]$$

(線分の両端点, 三角形の周, 四面体の表面等）$\partial\,|s| := \displaystyle\bigcup_{i=0}^{n} \left|\partial^i s\right|$ を幾何単体 $|s|$ の **(幾何) 境界** というが, 形式的な和

$$\partial\,[s] := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\,[\partial^i s] = [\partial^0 s] - [\partial^1 s] + [\partial^2 s] - \cdots + (-1)^n [\partial^n s]$$

は有向単体 $[s]$ の向き付けられた境界と考えられる. この和については

$$\partial\,(-[s]) = -\partial\,[s] \qquad (\partial\,[s_\sigma] = (\operatorname{sgn}\sigma)\partial\,[s])$$

が成り立つ.
$(\because)$ $s' = a_1 a_0 a_2 \cdots a_n$, $[s'] = -[s]$ について
$\partial^0 s' = \check{a}_1 a_0 a_2 \cdots a_n = \partial^1 s$, $\partial^1 s' = a_1 \check{a}_0 a_2 \cdots a_n = \partial^0 s$, $(i \geqq 2)$ $\partial^i s' = a_1 a_0 a_2 \cdots \check{a}_i \cdots a_n \Rightarrow [\partial^i s'] = -[\partial^i s]$.
$\partial\,[s'] = [\partial^0 s'] - [\partial^1 s'] + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} (-1)^i [\partial^i s'] = [\partial^1 s] - [\partial^0 s] - \sum_{i=2}^{n} (-1)^i [\partial^i s] = -([\partial^0 s] - [\partial^1 s] + \sum_{i=2}^{n} (-1)^i [\partial^i s]) = -\partial\,[s]$.
他も同様.