経済学特講II 第11回

競争均衡の計算のための繰り返しオークションの数理 ---離散凸解析の視点からの理解---

塩浦昭義

今日の内容

- 効用関数が粗代替の場合の均衡の計算

オークションのモデル

- 商品の集合 $N = \{1, \ldots, n\}$
  - 各商品の個数は1と限定
- m 人の参加者(bidder)で商品を分け合う
- 参加者 $i = 1, \ldots, m$ の**効用関数** $f_i\colon 2^N \to \mathbb{Z}_+$

- 財の**価格ベクトル** $p \in \mathbb{R}^n_+$
- **定義**：**間接効用関数** $V_i\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$
  - $V_i(p) = \max\{f_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$
- **定義**：**需要集合** $D_i(p) \subseteq 2^N$
  - $D_i(p) = \arg\max\{f_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$

競争均衡

価格pの下で
最も欲しい
商品セット全体

- 財の価格ベクトル $p \in \mathbb{R}_+^n$
- **定義**：**需要集合**$D_i(p) \subseteq 2^N$
  - $D_i(p) = \arg\max\{f_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$
- **定義**：価格ベクトルp^*とNの分割$(X_1, \ldots, X_m)$の組は**競争均衡**

ç è $X_i \in D_i(p^*)$ $(i = 1, \ldots, m)$

p^*は**均衡価格**

価格p^*の下で
皆が最良の
商品セット

効用関数の粗代替性

定理[Kelso-Crawford(1982), et al.]：
f_i は**粗代替性**を満たす è 競争均衡が存在

粗代替性 iPad が値上がりしたら，他の商品の欲しさが高まる

- **定義**：効用関数 $f_i\colon 2^N \to \mathbb{Z}_+$ は
  粗代替性(gross-substitutes property)を満たす

ç è $\forall p \in \mathbb{R}^N,\ q = p + \lambda e_j,$

$\forall X \in D_i(p),\ \exists Y \in D_i(q)$

s.t. $X \setminus \{j\} \subseteq Y$

$$D_i(p) \equiv \arg\max\{f_i(S) - \textstyle\sum_{i\in S} p_i \mid S \subseteq N\}$$

リアプノフ関数

Ausubel (2006)

リアプノフ関数: $L(p) = p(N) + \sum_i V_i(p)$

間接効用関数 $V_i(p) = \max\{f_i(X) - p(X) | X \subseteq N\}$

命題: (i) L **は劣モジュラ関数**
(ii) p : L **の最小解** ç è p: **均衡価格**
(iii) ∃ L **の整数最小解**

Ausubel **の繰り返しオークション**
＝ **リアプノフ関数の最小化アルゴリズム**

リアプノフ関数

Ausubel (2006)

リアプノフ関数: $L(p) = p(N) + \sum_i V_i(p)$

間接効用関数 $V_i(p) = \max\{f_i(X) - p(X) | X \subseteq N\}$

命題: (i) L **は劣モジュラ関数**
(ii) p : L **の最小解** ç è p: **均衡価格**
(iii) ∃ L **の整数最小解**

競り上げオークション

Step 0: $p \coloneqq$ **十分小さい価格ベクトル (例: 0)**

Step 1: $L(p + d)$ **を最小にする** $d = d_* \in \{0, +1\}^n$ **を計算**

Step 2: $L(p + d_*) \geq L(p)$ è **終了 (**p **は均衡価格)**

Step 3: $p \coloneqq p + d_*$, Step 1 **へ**

リアプノフ関数の最小解＝均衡価格

均衡が存在するとき，均衡価格p***と均衡配分**(X*$_1$,…,X*$_m$) **に対して**
$L(p^*) = \sum_i f_i(X_i^*)$
(**証明**) p* **と** (X*$_1$,…,X*$_m$)**に対し，均衡の定義から**
$$V_i(p^*) = f_i(X_i^*) - p^*(X_i^*)$$
よって，$L(p^*) = p^*(N) + \sum_i V_i(p^*) = p^*(N) + \sum_i\{f_i(X_i^*) - p^*(X_i^*)\}$
$= \sum_i f_i(X_i^*)$ （∵ (X*$_1$,…,X*$_m$) **は** N **の分割**)

均衡価格 è L の最小解
(**証明**) **任意の価格** p **に対し，**
$$V_i(p) = \max\{f_i(X) - p(X) | X \subseteq N\} \geq f_i(X_i^*) - p(X_i^*)$$
よって，$L(p) = p(N) + \sum_i V_i(p) \geq p(N) + \sum_i\{f_i(X_i^*) - p(X_i^*)\}$
$= \sum_i f_i(X_i^*) = L(p^*)$ （∵ (X*$_1$,…,X*$_m$) **は** N **の分割**)
ゆえにp* **は**L **の最小解**

リアプノフ関数の最小解＝均衡価格

均衡価格p*が存在するとき，

L の最小解q è 均衡価格

（証明）前のスライドと同様にして，

$$V_i(q) = \max\{f_i(X) - q(X) | X \subseteq N\} \geq f_i(X_i^*) - q(X_i^*)$$

よって，$L(q) = q(N) + \sum_i V_i(q) \geq q(N) + \sum_i \{f_i(X_i^*) - q(X_i^*)\}$

$= \sum_i f_i(X_i^*) = L(p^*)$ （∵ (X*$_1$,…,X*$_m$) は N の分割）

均衡価格p*もLの最小解なので， L(q)=L(p*)

ゆえに，不等号は等号で成立

$$V_i(q) = \max\{f_i(X) - q(X) | X \subseteq N\} = f_i(X_i^*) - q(X_i^*)$$

これは，q が均衡価格であることを意味する

オークション理論と離散凸解析の繋がり

定理： [Kelso-Crawford (1982), et al.]

f_i: **粗代替性** è **ワルラス均衡価格が存在**

- **定義：** $f_i\colon 2^N \to \mathbb{Z}_+$ **は粗代替性**(gross-substitutes) **を満たす**

ç è $\forall p \in \mathbb{R}^n$, $q = p + \lambda e_j$,

$\forall X \in D_i(p)$, $\exists Y \in D_i(q)$: $X \setminus \{j\} \subseteq Y$

定理： [藤重-Yang (2003)]

f_i: **粗代替性** ç è M♮凹性

è **離散凸解析との繋がり**

M♮凹性

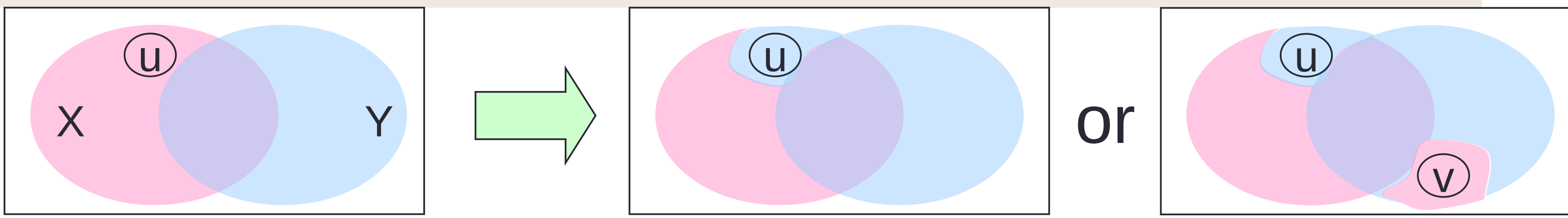
定義: M♮凹性(M♮-concavity) [Murota-Shioura(1999)]

$\forall X, Y \subseteq N, \forall u \in X \setminus Y$, (i) or (ii) **成立**:

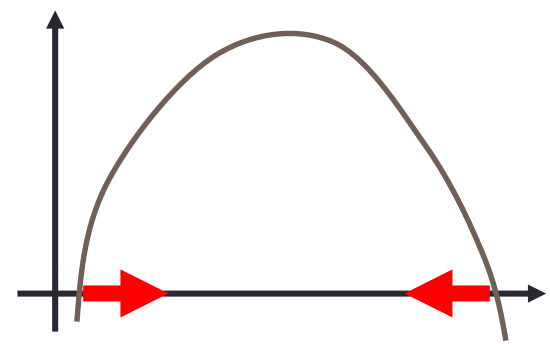
$X \setminus Y = \emptyset$ のときは自動的に成立

(i) $f(X) + f(Y) \leq f(X - u) + f(Y + u)$

(ii) $\exists v \in Y \setminus X$: $f(X) + f(Y) \leq f(X - u + v) + f(Y + u - v)$



- **離散的な凹関数**
- **価格ベクトルを使わない性質**



M♮凹性 è 粗代替性 の証明

$p \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0, j \in N, X \in D_i(p)$ を任意に選ぶ à $q = p + \lambda e_j$ とおく

$Y \in D_i(q)$ として, |X-Y|+|Y-X| 最小のものを選ぶ

è |X-Y'|+|Y'-X|< |X-Y|+|Y-X| ならば $Y' \notin D_i(q)$

以下, $X \setminus \{j\} \subseteq Y$ を背理法で証明する

ある$u \in X \setminus \{j\}$に対して$u \notin Y$ と仮定, 矛盾を導く.

$u \in X \setminus Y$ なので, M♮凹性の定義より, (i) or (ii) が成立：

(i) $f(X) + f(Y) \leq f(X - u) + f(Y + u)$,

(ii)$\exists v \in Y \setminus X$: $f(X) + f(Y) \leq f(X - u + v) + f(Y + u - v)$

以下, (ii)成立の場合を考える ((i) の場合も同様に証明可能)

M♮凹性 è 粗代替性 の証明

$[f(X) - p(X)] + [f(Y) - q(Y)]$
$\leq [f(X - u + v) - p(X - u + v)] + [f(Y + u - v) - q(Y + u - v)]$

が成立

$X \in D_i(p)$ **なので,** $f(X) - p(X) \geq f(X - u + v) - p(X - u + v)$

$\therefore f(Y) - q(Y) \leq f(Y + u - v) - q(Y + u - v)$

$Y \in D_i(q)$**なので,** $Y' = Y + u - v$ **とおくと,** $Y' \in D_i(q)$

一方, |X-Y'|+|Y'-X|=|X-Y|+|Y-X|-2 **より** $Y' \notin D_i(q)$ **(矛盾)**

離散凸解析 (Murota 1998)

2種類の離散凸性:

M♮凸 / L♮凸

離散ルジャンドル変換による共役性

定理: $f_i\colon 2^N \to \mathbb{Z}$ はM♮凹
ç è $V_i(p) = \max\{f_i(X) - p(X) | X \subseteq N\}$ はL♮凸

M♮凸 / L♮凸関数の最小化アルゴリズム

L♮凸関数

命題：**連続関数** $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **は凸関数**

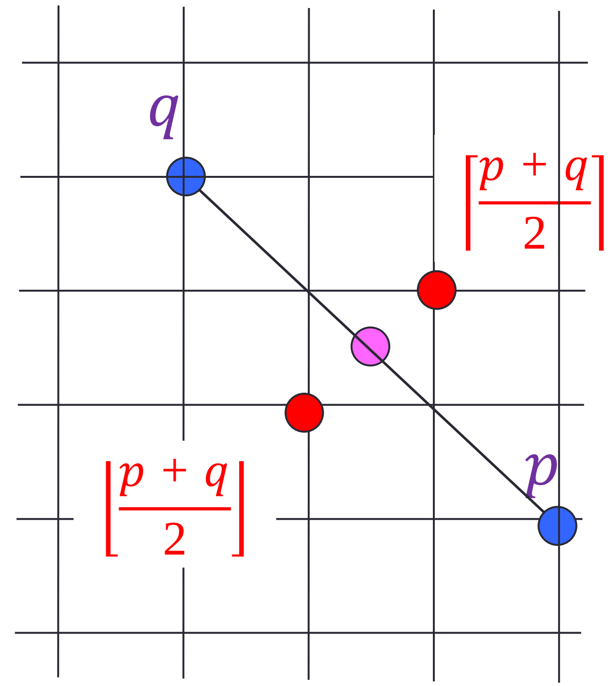
ç è **中点凸性**：$\forall p, q \in \mathbb{R}^n,\ \ g(p) + g(q) \geq 2g\left(\frac{p+q}{2}\right)$

定義： $g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ **は**L♮凸関数

ç è **離散中点凸性**： $\forall p, q \in \mathbb{Z}^n,$

$$g(p) + g(q)$$

$$\geq g\left(\left\lceil\frac{p+q}{2}\right\rceil\right) + g\left(\left\lfloor\frac{p+q}{2}\right\rfloor\right)$$



L♮凸関数は和に関して閉じている

(**L♮凸関数とL♮凸関数の和はL♮凸**)

L♮凸関数

定理: $g\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ はL♮凸関数

ç è **次の2つの不等式を満たす**:

(i) **任意の**$a \in \mathbb{Z}^n$**および**$u, v \in \{1, \dots n\}, u \neq v$ **に対して**

$g(a + e_u) + g(a + e_v) \geq g(a + e_u + e_v) + g(a)$ **(劣モジュラ性)**

(ii) **任意の**$a \in \mathbb{Z}^n$**および**$u \in \{1, \dots n\}$ **に対して**

$g(a) + g(a + e_u + \mathbf{1}) \geq g(a + \mathbf{1}) + g(a + e_u)$

「L♮凸関数 è (i)」**の証明**:

$p = a + e_u,\ q = a + e_v$ **とおくと**,

$\left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil = a + e_u + e_v,\ \left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor = a$ **なので成立.**

「L♮凸関数 è (ii)」**の証明**:

$p = a,\ q = a + e_u + \mathbf{1}$**とおくと得られる.**

M♮凹性とL♮凸性の間の共役性

M♮凹とL♮凸は表裏一体の関係

定理： $f_i\colon 2^N \to \mathbb{Z}$ はM♮凹
ç è $V_i(p) = \max\{f_i(X) - p(X) | X \subseteq N\}$はL♮凸

※関数V_iの情報から，関数f_iの情報を取り出すことが可能

$$\min\{V_i(p) + p(Y) | p \in \mathbb{Z}_+^n\} = f_i(Y)$$

（証明）左辺を $\tilde{f}_i(Y)$ とおく．
$V_i(p) \geq f_i(Y) - p(Y)$ なので，
$\tilde{f}_i(Y) \geq \min\{f_i(Y) - p(Y) + p(Y) | p \in \mathbb{Z}_+^n\} = f_i(Y)$

一方，$q_i = \begin{cases} 0 & (j \in X) \\ \text{十分大きい}M > 0 & (j \notin X) \end{cases}$ とおくと，

$$V_i(q) = f_i(X) - q(X)$$

よって，$\tilde{f}_i(Y) = \min\{V_i(p) + p(Y) | p \in \mathbb{Z}_+^n\} \leq V_i(q) + q(Y) = f_i(X)$

M♮凹性とL♮凸性の間の共役性：証明

「f_i: M♮凹 è V_i: 劣モジュラ」のみ証明

$$V_i(a + e_u) + V_i(a + e_v) \geq V_i(a + e_u + e_v) + V_i(a)$$

(証明) $p = a + e_u, q = a + e_v, b = a + e_u + e_v$ とおく.
$X, Y \subseteq N$ は$V_i(a) = f_i(X) - a(X), V_i(b) = f_i(Y) - b(Y)$ を満たすとする

$$V_i(a + e_u) \geq f_i(X) - (a + e_u)(X)$$

$$V_i(a + e_v) \geq f_i(Y) - (a + e_v)(Y)$$

なので, $(a + e_u)(X) + (a + e_v)(Y) \leq a(X) + b(Y)$

ç è $e_u(X) \leq e_u(Y)$

ならば劣モジュラ性が成立.
これが成り立たないのは $u \in X \setminus Y$ のときのみ

M♮凹性とL♮凸性の間の共役性：証明

「f_i: M♮**凹** è V_i: **劣モジュラ」のみ証明**

$$V_i(a + e_u) + V_i(a + e_u) \geq V_i(a + e_u + e_v) + V_i(a)$$

(証明の続き) $u \in X \setminus Y$ **なので,** M♮**凹性の定義より**(i) or (ii) **が成立:**

(i) $f_i(X) + f_i(Y) \leq f(X - u) + f(Y + u)$,

(ii)$\exists v \in Y \setminus X$: $f(X) + f(Y) \leq f(X - u + v) + f(Y + u - v)$

以下, (ii)成立の場合を考える ((i) の場合も同様に証明可能)

$V_i(a + e_u) \geq f_i(X - u + v) - (a + e_u)(X - u + v) = f_i(X - u + v) - a(X - u + v)$

$V_i(a + e_v) \geq f_i(Y + u - v) - (a + e_v)(Y + u - v) = f_i(Y + u - v) - a(Y + u - v)$

$\therefore V_i(a + e_u) + V_i(a + e_u)$

$\geq f_i(X - u + v) + f_i(Y + u - v) - a(X - u + v) - a(Y + u - v)$

$= f_i(X - u + v) + f_i(Y + u - v) - a(X) - a(Y)$

$\geq f_i(X) + f_i(Y) - a(X) - a(Y)$

$\geq f_i(X) + f_i(Y) - a(X) - b(Y) = V_i(a) + V_i(a + e_u + e_v)$

(非負条件下での) L♮凸関数の最小化

最小費用テンション問題と同様の最適性条件

定理: L♮凸関数$g\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$に対し,
ベクトル $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ は最小解
ç è 任意の$X \subseteq \{1, \dots, n\}$ に対し,

$$g(q^* + e_X) \geq g(q^*), \qquad g(q^* - e_X) \geq g(q^*)$$

定理: L♮凸関数 $g\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$ に対し, ベクトルの非負条件の下で,
$q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ は最小解
ç è 任意の$X \subseteq \{1, \dots, n\}$ に対し,

$$g(q^* + e_X) \geq g(q^*)$$

$$q^* - e_X \geq 0 \text{ ならば } g(q^* - e_X) \geq g(q^*)$$

よって, 最小費用テンション問題と同様のアルゴリズムで
最小解が求められる

アルゴリズムその1

ベクトルが上下に動きながら，関数値を減少させる

ステップ0：実行可能解$q = (q_1, \dots, q_n)$を選び，初期解とする．
ステップ1：次の条件を満たす$X^*, Y^* \subseteq N$ を求める：
$q + e_{X^*}$は実行可能かつ
$$g(q + e_{X^*}) = \max\{g(q + e_X) | X \subseteq N,\ q + e_X \text{は実行可能}\}$$
$q - e_{Y^*}$は実行可能かつ
$$g(q - e_{Y^*}) = \max\{g(q - e_Y) | Y \subseteq N,\ q - e_Y \text{は実行可能}\}$$
ステップ2：$g(q + e_{X^*}) \geq g(q)$かつ$g(q - e_{Y^*}) \geq g(q)$ ならば終了．
現在のqは最適解．
ステップ3： qを$q + e_{X^*}$または$q - e_{Y^*}$に更新
(関数値が下がらない場合は更新しない)．ステップ1へ戻る．

アルゴリズムその3：単調増加型

アルゴリズムその2の修正版：
ベクトルqが単調非減少

ステップ0：ある最適解の下界となる実行可能解$q=(q_1,\dots,q_n)$を
選び，初期解とする．

ステップ1：次の条件を満たす$X^* \subseteq N$ を求める：

$q+e_{X^*}$は実行可能かつ

$g(q+e_{X^*})=\min\{g(q+e_X) | X \subseteq N,\ q+e_X$は実行可能$\}$

ステップ2：$g(q+e_{X^*}) \geq g(q)$ ならば終了．現在のqは最適解．

ステップ3： qを$q+e_{X^*}$に更新．ステップ1へ戻る．

競り上げオークションの解析

定理： f_i: **粗代替性** ç è M♮凹性 [藤重-Yang (2003)]

離散凸共役性定理 (室田1998)

定理： **間接効用関数** ＝ L♮凸関数 [室田-塩浦-Yang (2016)]
リアプノフ関数 ＝ L♮凸関数

考察： **競り上げオークション**
＝ **L♮凸関数最小化の増加型最急降下法**