

経済学特講II 第10回

競争均衡の計算のための 繰り返しオークションの数理 ---離散凸解析の視点からの理解---

塩浦昭義

今日の内容

- unit-demand valuation に関する均衡計算へ適用されたアルゴリズムの振る舞いの解釈

最小重みテンション問題の最適性条件

最小重みテンション問題 (関数 g_{ij} , g_j は凸関数)

最小化 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} g_{ij}(q_i - q_j) + \sum_{j=1}^n g_j(q_j)$
 条件 $a_{ij} \leq q_i - q_j \leq b_{ij} \ (1 \leq \forall i < \forall j \leq n)$
 $a_j \leq q_j \leq b_j \ (1 \leq \forall j \leq n)$, 各 q_j は整数

定理: ベクトル $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ は最適解

⇔ 任意の $X \subseteq \{1, \dots, n\}$ に対し,

$q^* + e_X$ が実行可能解 ⇔ $g(q^* + e_X) \geq g(q^*)$

$q^* - e_X$ が実行可能解 ⇔ $g(q^* - e_X) \geq g(q^*)$

最適性条件の判定方法

定理: ベクトル $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ は最適解

$\Leftrightarrow$ 任意の $X \subseteq \{1, \dots, n\}$ に対し,

$q^* + e_X$ が実行可能解 $\Leftrightarrow g(q^* + e_X) \geq g(q^*)$

$q^* - e_X$ が実行可能解 $\Leftrightarrow g(q^* - e_X) \geq g(q^*)$

$g(q^* + e_X)$ を最小にする X , $g(q^* - e_Y)$ を最小にする Y を計算できれば良い

- 単純なやり方: すべて X, Y について試す
 - X, Y の種類は 2^n 個 $\Rightarrow$ 指数時間が必要なので遅い
- 賢いやり方: グラフの **最小s-tカット問題** に帰着
 - 効率的に (多項式時間で) 計算可能

最小重みテンション問題のアルゴリズムその2

アルゴリズムその1の修正版:

前半ではベクトル q が単調非減少 à 後半では単調非増加

ステップ0: 実行可能解 $q = (q_1, \dots, q_n)$ を選び, 初期解とする.

ステップU1: 次の条件を満たす $X^* \subseteq N$ を求める: $q + e_{X^*}$ は実行可能かつ

$$g(q + e_{X^*}) = \min\{g(q + e_X) | X \subseteq N, q + e_X \text{は実行可能}\}$$

ステップU2: $g(q + e_{X^*}) \geq g(q)$ ならばステップD1へ.

ステップU3: q を $q + e_{X^*}$ に更新. ステップU1へ戻る.

ステップD1: 次の条件を満たす $X^* \subseteq N$ を求める: $q - e_{Y^*}$ は実行可能かつ

$$g(q - e_{Y^*}) = \min\{g(q - e_Y) | Y \subseteq N, q - e_Y \text{は実行可能}\}$$

ステップD2: $g(q - e_{Y^*}) \geq g(q)$ ならば終了. 現在の q は最適解.

ステップD3: q を $q - e_{Y^*}$ に更新. ステップD1へ戻る.

演習問題

次の最小重みテンション問題を考える：

$$\text{最小化 } g(q) \equiv (q_a - q_b + 1)^2 + (q_a - q_c - 3)^2 + (q_b - q_c - 4)^2 \\ + q_a^2 + q_b^2 + q_c^2$$

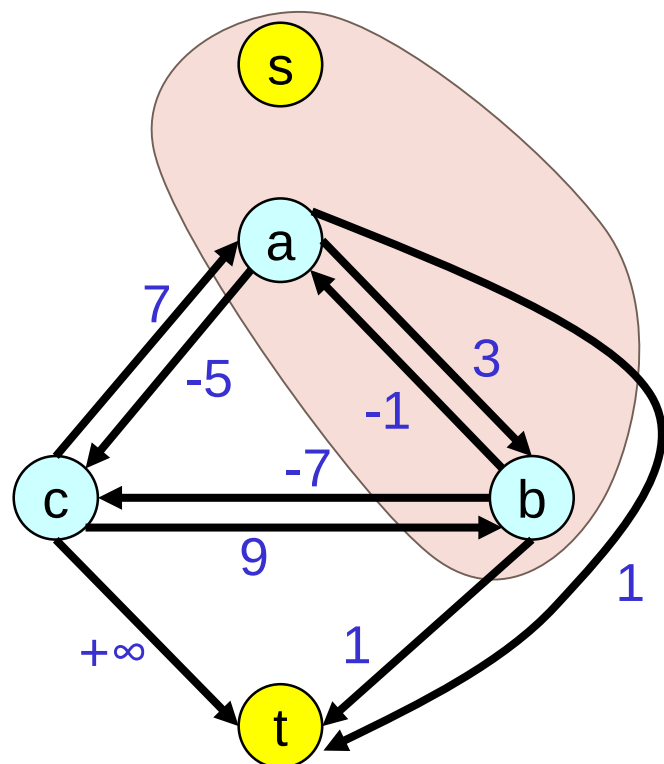
$$\text{条件 } 0 \leq q_a \leq 3, 0 \leq q_b \leq 3, -2 \leq q_c \leq 0$$

問1: $(q_a, q_b, q_c) = (0, 0, 0)$ とする. $g(q + e_X) = c(X, V - X)$ を満たすグラフを書き, 最小s-tカットを計算せよ.

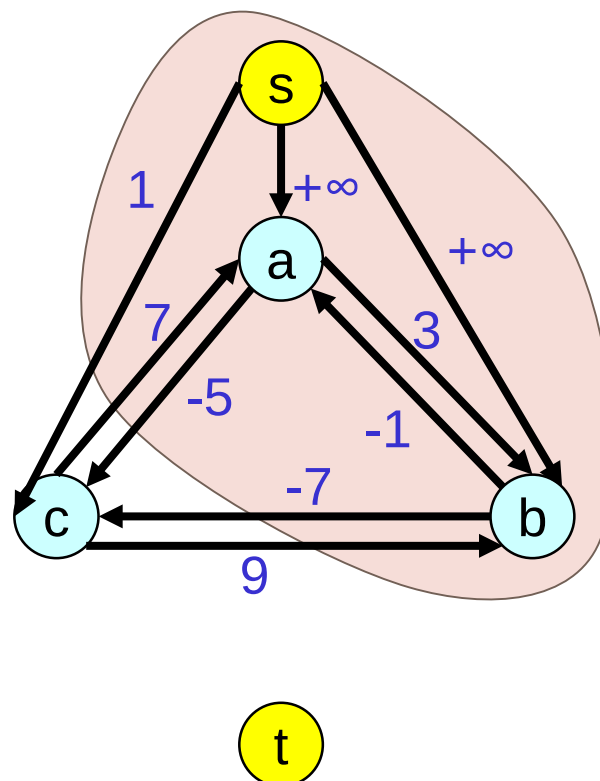
同様に, $g(q - e_X) = c(X, V - X)$ を満たすグラフを書き, 最小s-tカットを計算せよ.

問2: 初期解を $(q_a, q_b, q_c) = (0, 0, 0)$ としてアルゴリズムその2を実行せよ. なお, 最適解は $(0, 1, -2)$ である.

問1の答え

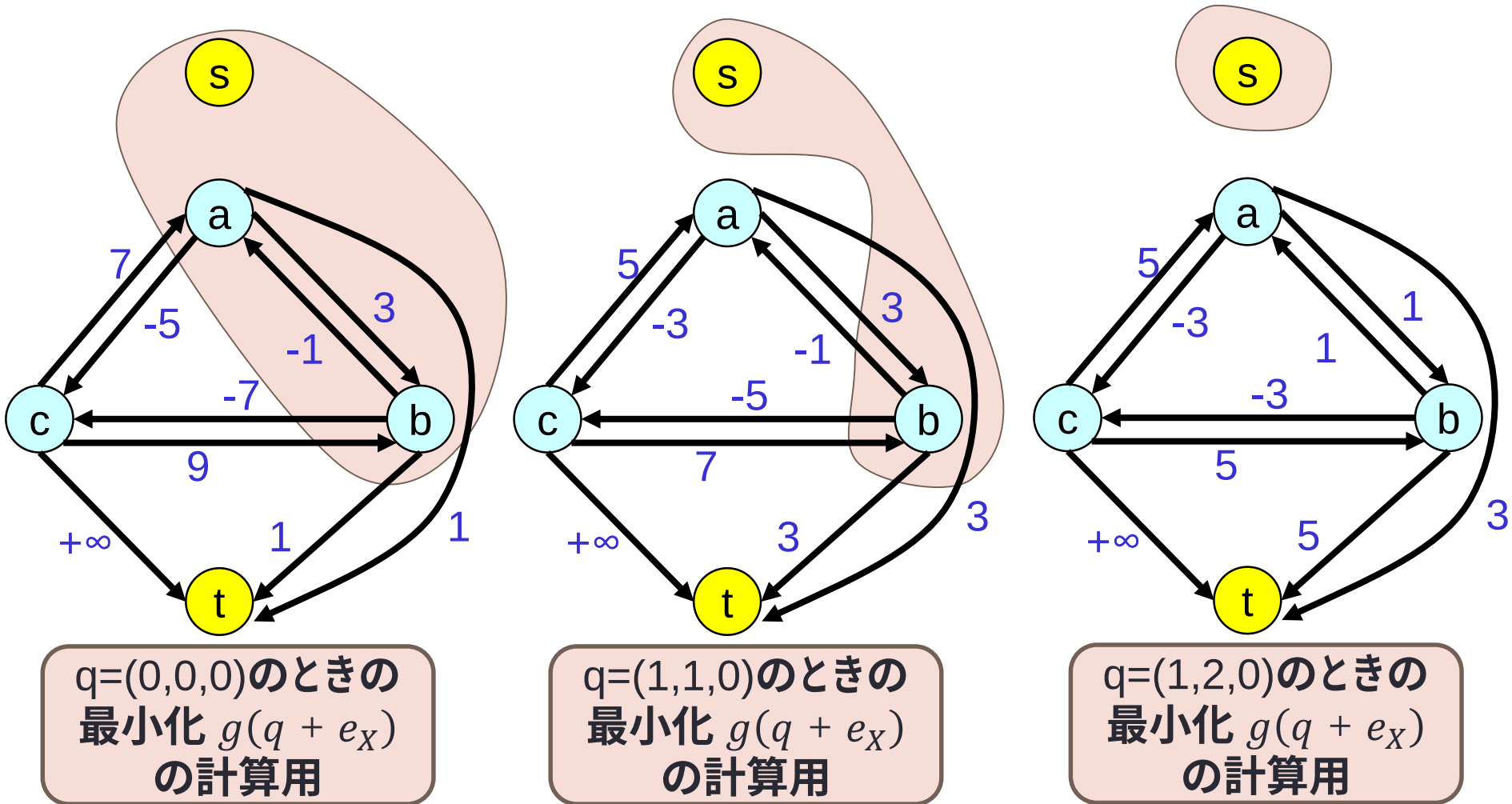


$q=(0,0,0)$ のときの
最小化 $g(q + e_X)$
の計算用

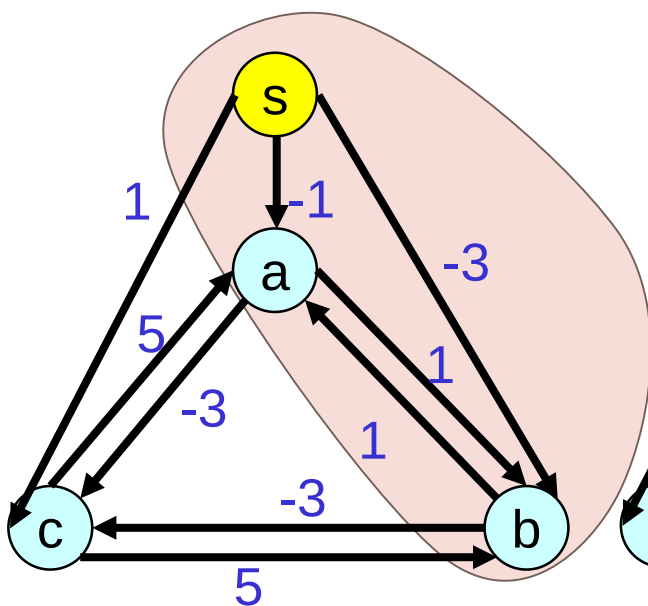


$q=(0,0,0)$ のときの
最小化 $g(q - e_X)$
の計算用

問2の答え

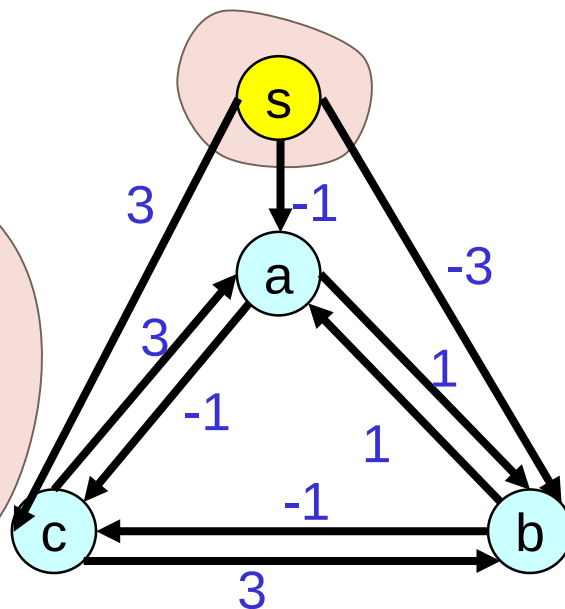


問2の答え



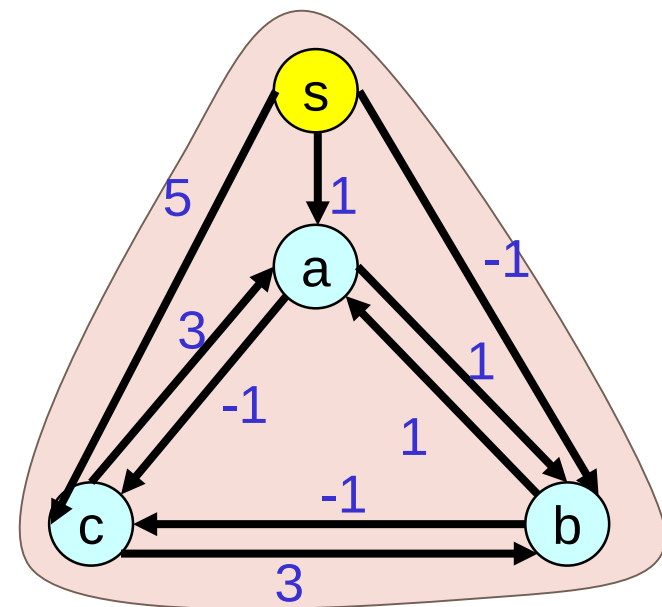
t

$q=(1,2,0)$ のときの
最小化 $g(q - e_X)$
の計算用



t

$q=(1,2,-1)$ のときの
最小化 $g(q - e_X)$
の計算用



t

$q=(0,1,-2)$ のときの
最小化 $g(q - e_X)$
の計算用

unit-demand valuation の場合の均衡

価格 p_j ($j \in N$) が**均衡**であるための必要十分条件は

2部グラフを使って表現可能

$$M_+ = \left\{ i \in M \mid \max_{j' \in N} \{v_{ij'} - p_{j'}\} > 0 \right\}, \quad M_0 = \{ i \in M \mid \max_{j' \in N} \{v_{ij'} - p_{j'}\} = 0 \}$$

$$M_- = \{ i \in M \mid \max_{j' \in N} \{v_{ij'} - p_{j'}\} < 0 \}$$

2部グラフ G の頂点集合 $V = M \cup N$,

$$\text{枝集合 } E = \{(i, j) \mid i \in N, j \in M, v_{ij} - p_j = \max_{j' \in N} \{v_{ij'} - p_{j'}\}\}$$

価格 p_j ($j \in N$) は**均衡価格**

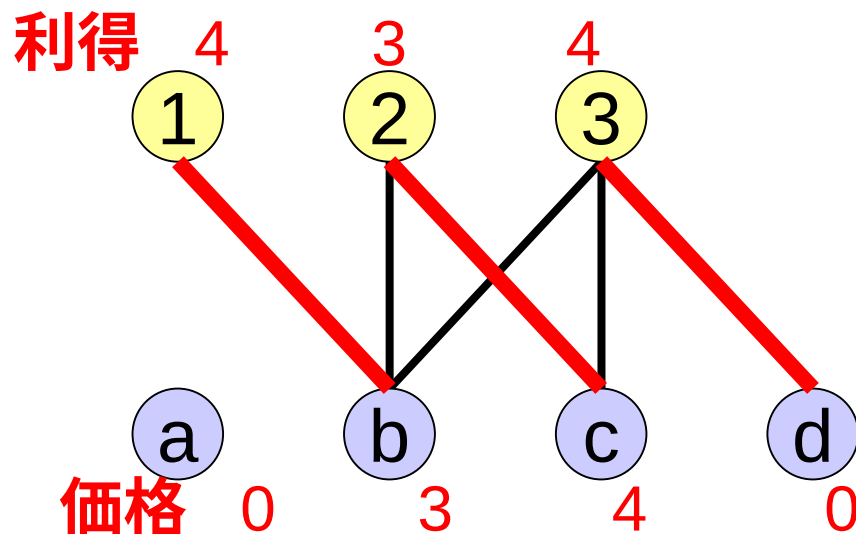
$\mathfrak{C}$ は 2部グラフにおいて以下の条件を満たすマッチング $F \subseteq E$ が存在

- F は M_+ に含まれる頂点をすべてカバーする
- F は M_- に含まれる頂点のいずれもカバーしない
- $j \in N$ が F によりカバーされていないならば, $p_j = 0$

($\mathfrak{C}$ は F は $p_j > 0$ なる頂点 $j \in N$ をすべてカバーする)

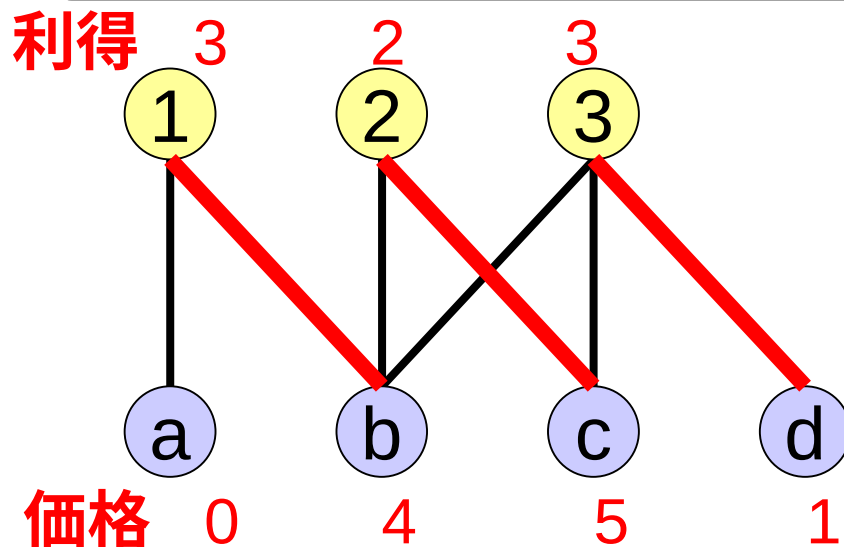
具体例1

v_{ij}	①	②	③
a	3	1	0
b	7	6	7
c	1	7	8
d	0	0	4



利得	①	②	③
a	3	1	0
b	4	3	4
c	-3	3	4
d	0	0	4

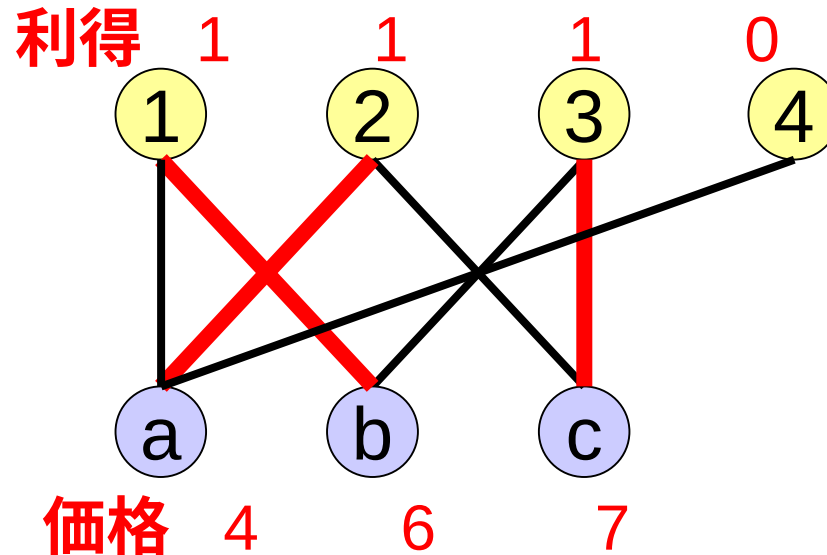
- 各参加者に割り当てられた財の利得は最大
- 財aは売れ残り ⇒ 価格0



利得	①	②	③
a	3	1	0
b	3	2	3
c	-4	2	3
d	-1	-1	3

具体例2

v_{ij}	①	②	③	④
a	5	5	1	4
b	7	6	7	3
c	6	8	8	4



v_{ij}	①	②	③	④
a	1	1	-3	0
b	1	0	1	-3
c	-1	1	1	-3

- 各参加者に割り当てられた財の利得は最大
- 最大利得0の参加者に財を割り当てなくても良い

マッチングに対するホールの定理

ホールの定理:

頂点集合 $A \cup B$ の2部グラフにおいて,
頂点集合 $X \subseteq A$ をカバーするマッチングが存在

$\Leftrightarrow$

X の任意の部分集合 X' に対し, X' に隣接する B の頂点の数 $\geq |X'|$

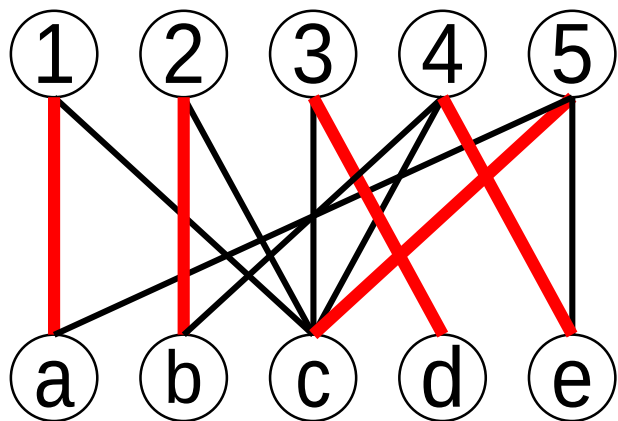
(対偶)

頂点集合 $X \subseteq A$ をカバーするマッチングが存在しない

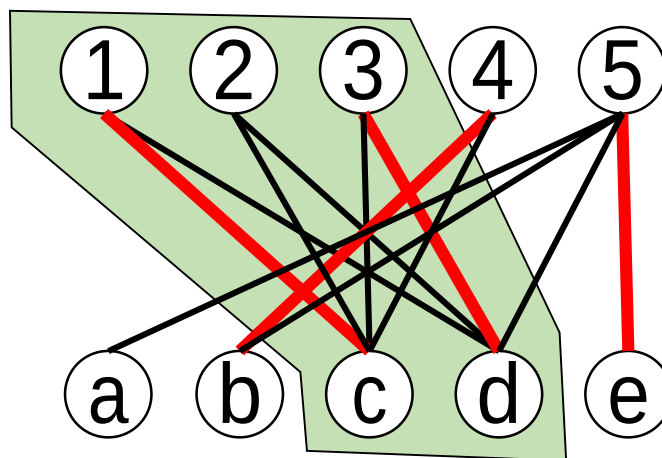
$\Leftrightarrow$

X のある部分集合 X' に対し, X' に隣接する B の頂点の数 $< |X'|$

ホールの定理: 例



$\{1, 2, \dots, 5\}$ 全員に割り当て可能



1, 2, 3 に割り当て可能な財 = $\{c, d\}$
 $\therefore$ 1, 2, 3 全員に財を
割り当てることは不可能

マッチングに対するホールの定理

ホールの定理の変種:

頂点集合 $A \cup B$ の2部グラフにおいて,
頂点集合 $X \subseteq A$ および $Y \subseteq B$ をカバーするマッチングが存在

$\Leftrightarrow$

X の任意の部分集合 X' に対し, X' に隣接する B の頂点の数 $\geq |X'|$

Y の任意の部分集合 Y' に対し, Y' に隣接する A の頂点の数 $\geq |Y'|$

(対偶)

頂点集合 $X \subseteq A$ および $Y \subseteq B$ をカバーするマッチングが存在しない

$\Leftrightarrow$

X のある部分集合 X' に対し, X' に隣接する B の頂点の数 $< |X'|$

または

Y のある部分集合 Y' に対し, Y' に隣接する A の頂点の数 $< |Y'|$

均衡価格の条件の書き換え

価格 p_j ($j \in N$) は**均衡価格**

⇔ 頂点集合 M_- を削除した2部グラフが以下の条件を満たす:

- M_+ の任意の部分集合 X' に対し,
 X' に隣接する N の頂点の数 $\geq |X'|$
- $p_j > 0$ なる頂点 $j \in N$ の部分集合 Y' に対し,
 Y' に隣接する $M_+ \cup M_0$ の頂点の数 $\geq |Y'|$

解釈

- 最大利得 ≥ 0 の任意の参加者グループに対し,
 グループの欲しい財の総数 $\geq$ グループの人数
- 価格 > 0 の財の任意の集合に対し,
 集合内の財を欲する参加者の総数 $\geq$ 集合内の財の数

最小化アルゴリズムとの関係

解釈

- 最大利得 ≥ 0 の任意の参加者グループに対し,
グループの欲しい財の総数 $\geq$ グループの人数
- 価格 > 0 の財の任意の集合に対し,
集合内の財を欲する参加者の総数 $\geq$ 集合内の財の数

最小化アルゴリズムは, これらの条件を満たそうとしている

- グループの欲しい財の総数 $<$ グループの人数
è **需要過多** è 財の**価格を上げる**と良い
アルゴリズムでは, $\min\{g(q - e_X)\} < g(q)$ の場合に対応
- 集合内の財を欲する参加者の総数 $<$ 集合内の財の数
è **需要不足** è 財の**価格を下げる**と良い
アルゴリズムでは, $\min\{g(q + e_X)\} < g(q)$ の場合に対応

unit-demand valuation の場合への アルゴリズムの適用と解釈

unit-demand valuation の場合の双対問題 の書き換え

最小化 $g(q) \equiv \sum_{i=1}^m q_i - \sum_{j=1}^n q_j$

条件 $q_i \geq v_{ij} + q_j$ (各財 j , 各参加者 i)

$q_i \geq 0$ (各参加者 i)

$q_j \leq 0$ (各財 j)

全ての i に対し, $q_i = \max \left[0, \max_{j \in N} \{v_{ij} + q_j\} \right]$ の場合を考えれば十分

$N = \{1, 2, \dots, n\}$, $M = \{1, 2, \dots, m\}$

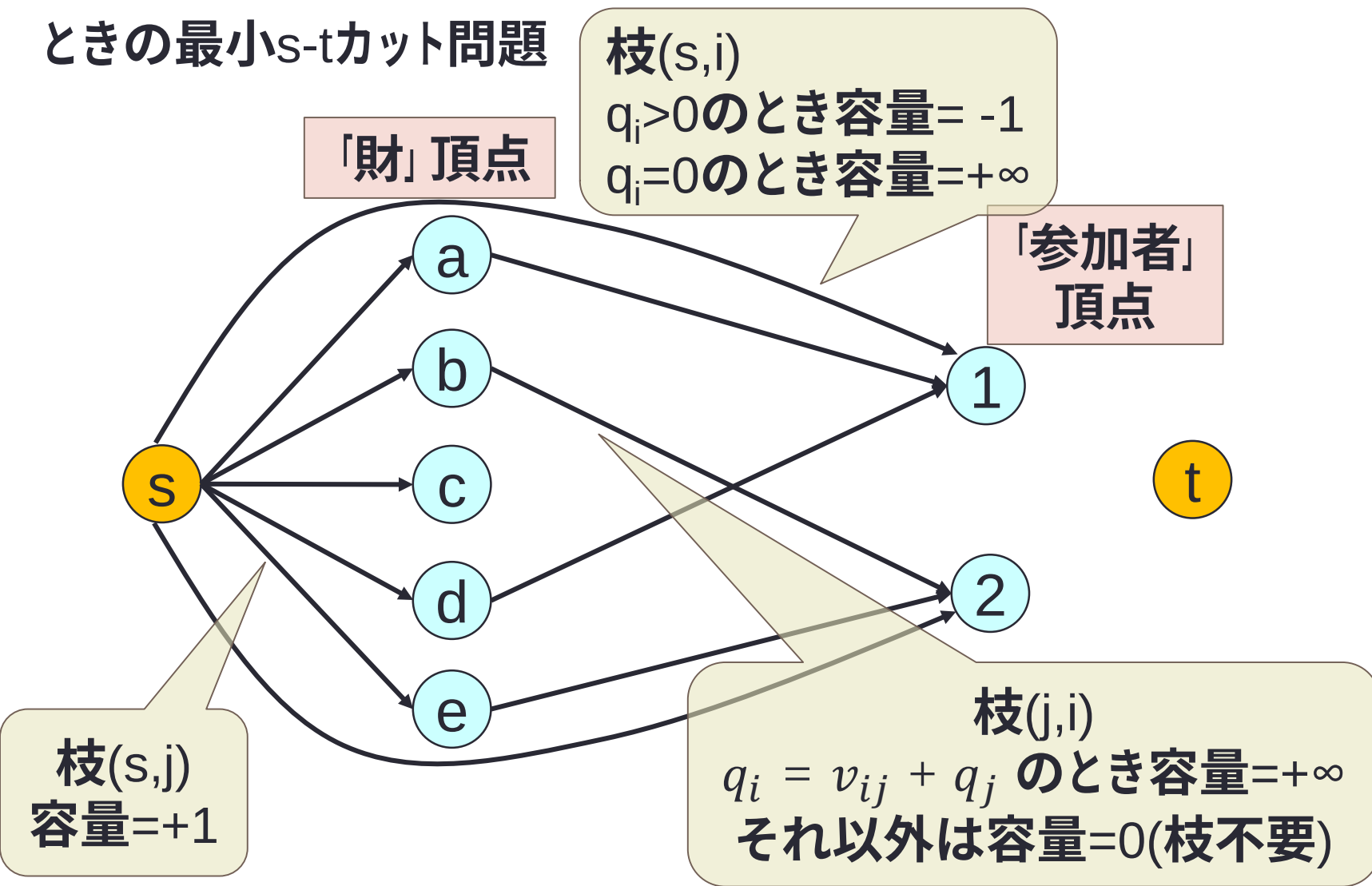
変数の解釈

• 変数 q_j は 価格 $p_j = -q_j$

• 変数 q_i は 参加者 i の最大の利得 $\max \left[0, \max_{j \in N} \{v_{ij} - p_j\} \right]$

最小s-tカットへの帰着 (その2)

「最小化 $g(q - e_Y) - g(q)$ 条件 $q - e_Y$ は実行可能解」を計算するときの最小s-tカット問題



最小s-tカットの解釈 (その2)

最少s-tカット問題---「どの財の価格を増やすと良いか」

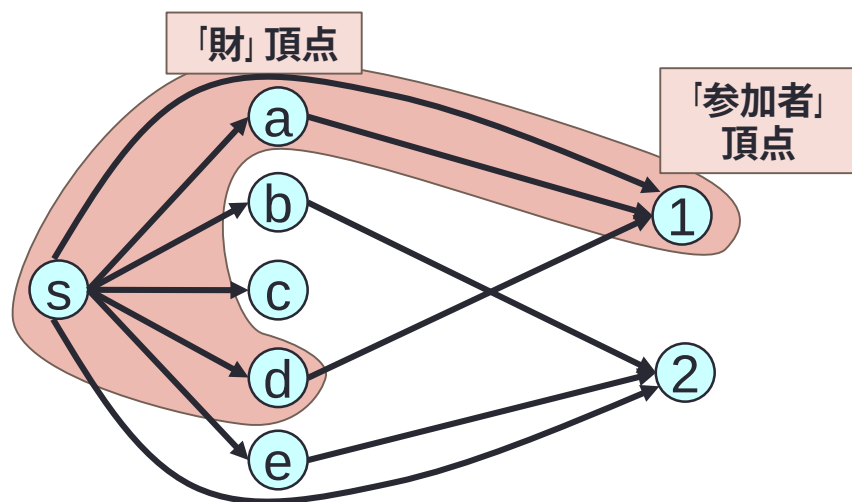
容量が有限のカット($X \cup \{s\}, Y \cup \{t\}$) ($Y = M \cup N - X$) の性質

- カットの容量 = $|Y \cap N| - |Y \cap M|$
- 容量 ∞ の枝を含まない

è 各参加者 $i \in Y \cap M$ に対し, $q_i > 0$

各財 $j \in X \cap N$ に対し, j を欲しい参加者 $\in X \cap M$

∴ $Y \cap M$ の中の各参加者の欲しい財 $\subseteq Y \cap N$



∴ カットの容量が負

è $|Y \cap N| < |Y \cap M|$

è グループの欲しい財の総数
 < グループの人数

t

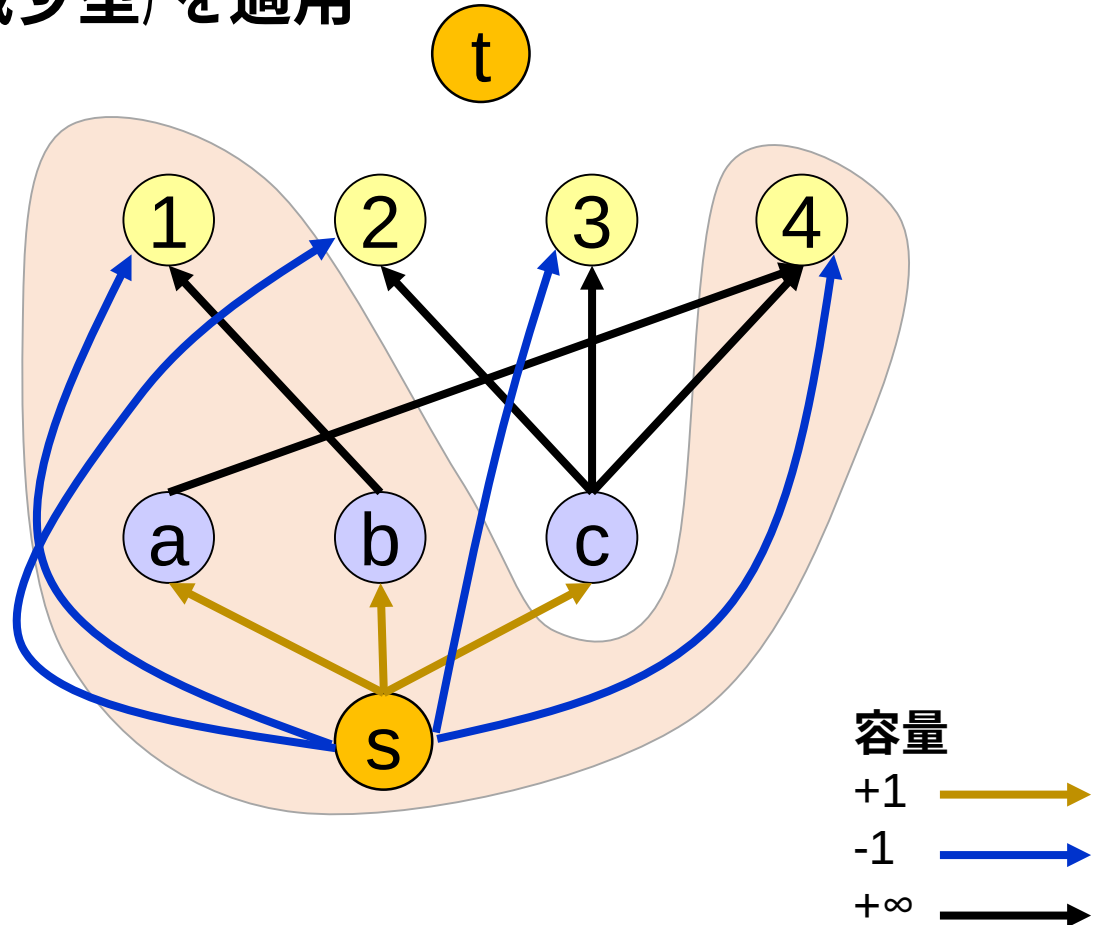
アルゴリズムでは, 最小s-tカットに
 対応する幾つかの変数を減らす
 ---需要不足の財の価格減少に対応

具体例2に対するアルゴリズムの適用

アルゴリズムその4 (単調減少型) を適用

$v_{ij} - p_j$	①	②	③	④
a	5	5	1	4
b	7	6	7	3
c	6	8	8	4

$$\begin{aligned}(q_a, q_b, q_c) \\ &= -(p_a, p_b, p_c) \\ &= (0, 0, 0)\end{aligned}$$

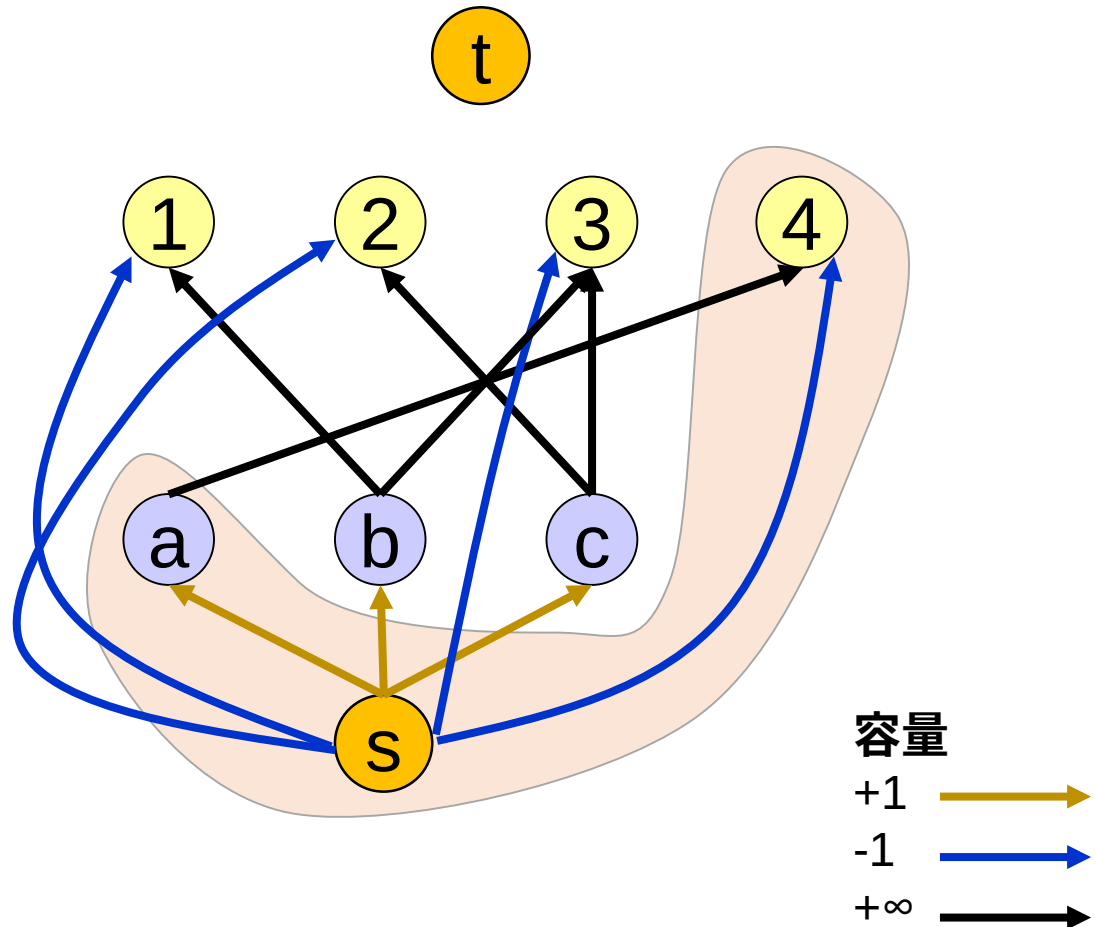


グループ{1,2}の欲しい財はcのみ
(需要過多)
è c の価格を増やす (q_c を減らす)

具体例2に対するアルゴリズムの適用

$v_{ij} - p_j$	①	②	③	④
a	5	5	1	4
b	7	6	7	3
c	5	7	7	3

$$\begin{aligned}(q_a, q_b, q_c) \\ &= -(p_a, p_b, p_c) \\ &= -(0, 0, 1)\end{aligned}$$

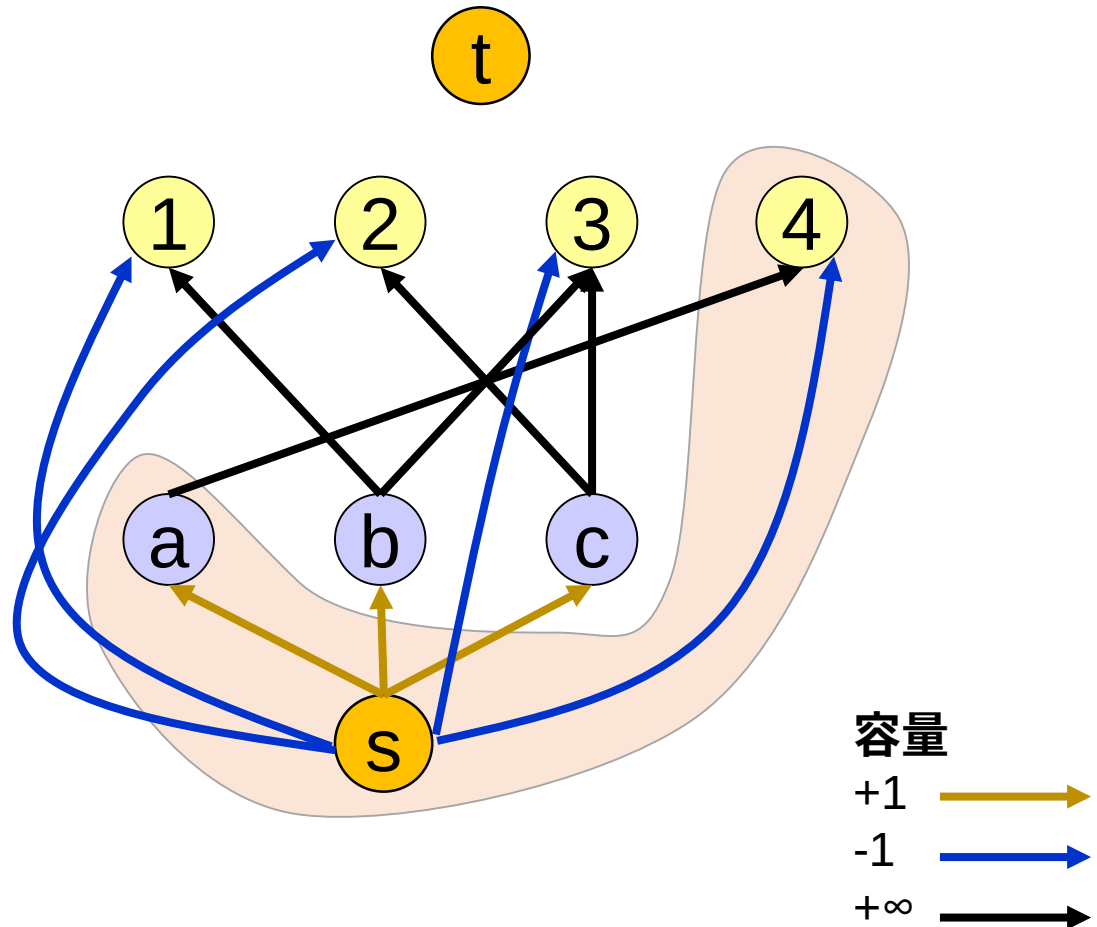


グループ{1,2,3}の欲しい財は{b,c}のみ
(需要過多)
è b,c の価格を増やす (q_b, q_c を減らす)

具体例2に対するアルゴリズムの適用

$v_{ij} - p_j$	①	②	③	④
a	5	5	1	4
b	6	5	6	2
c	4	6	6	2

$$\begin{aligned} & (q_a, q_b, q_c) \\ &= -(p_a, p_b, p_c) \\ &= -(0, 1, 2) \end{aligned}$$

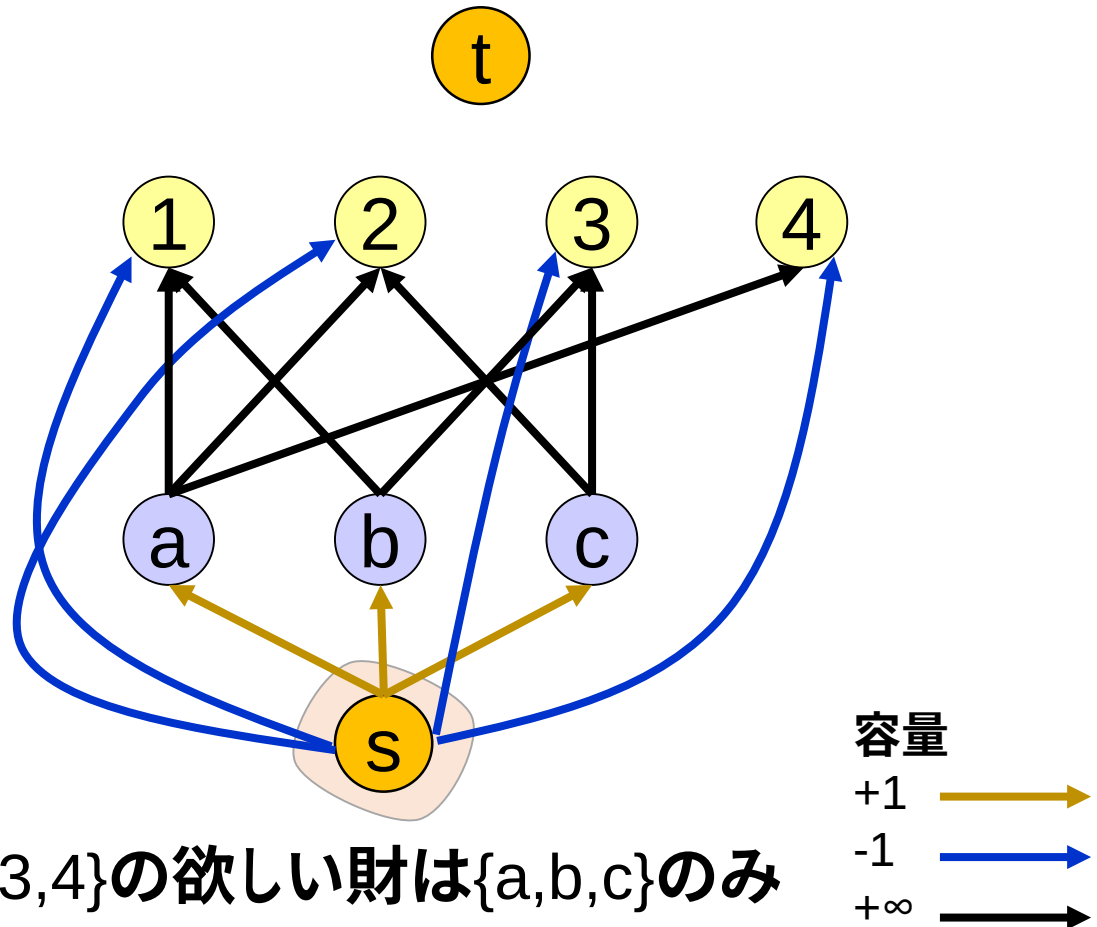


同じグラフ è 同じ最小カット
è b, c の価格を増やす (q_b, q_c を減らす)

具体例2に対するアルゴリズムの適用

$v_{ij} - p_j$	①	②	③	④
a	5	5	1	4
b	5	4	5	1
c	3	5	5	1

$$\begin{aligned}
 &(q_a, q_b, q_c) \\
 &= -(p_a, p_b, p_c) \\
 &= -(0, 2, 3)
 \end{aligned}$$



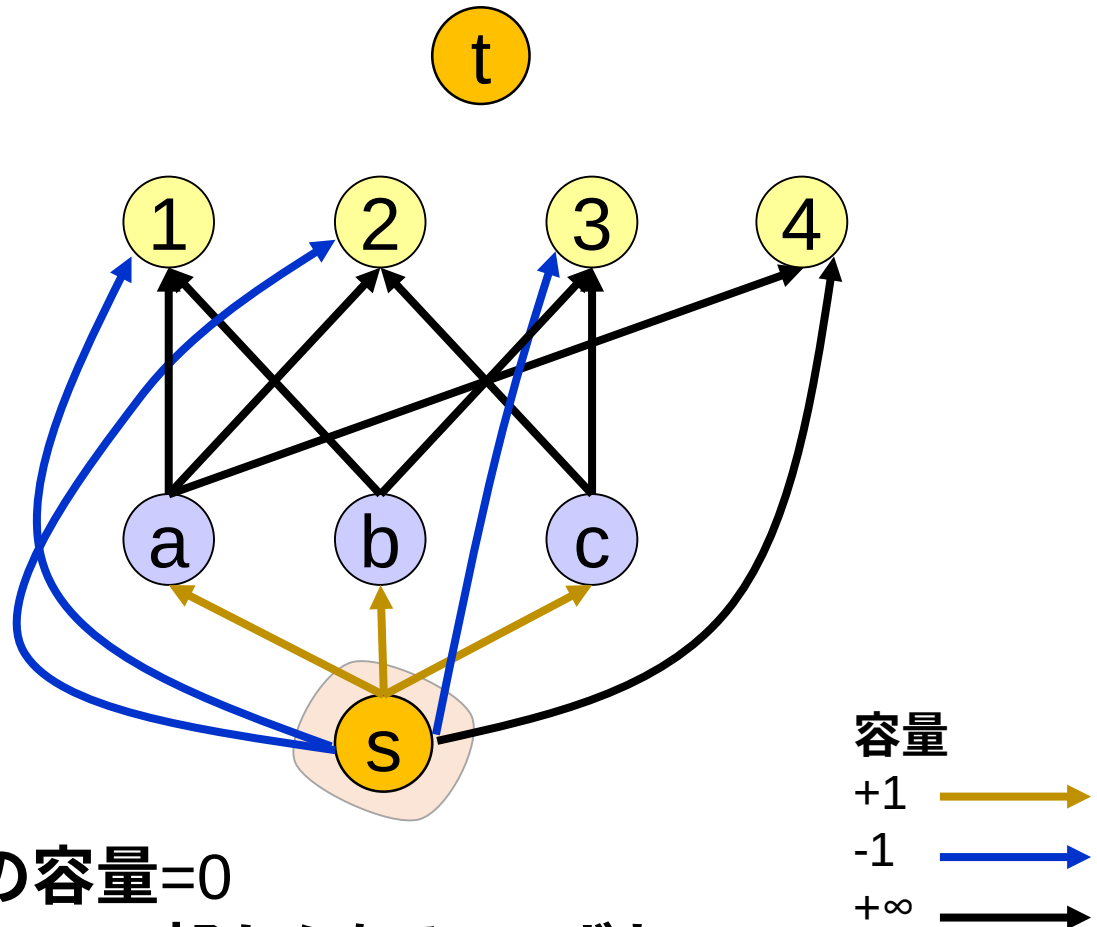
グループ{1,2,3,4}の欲しい財は{a,b,c}のみ
(需要過多)

è a,b,c の価格を増やす (q_a, q_b, q_c を減らす)
以降, 同じグラフが3回でてる

具体例2に対するアルゴリズムの適用

$v_{ij} - p_j$	①	②	③	④
a	1	1	-3	0
b	1	0	1	-3
c	-1	1	1	-3

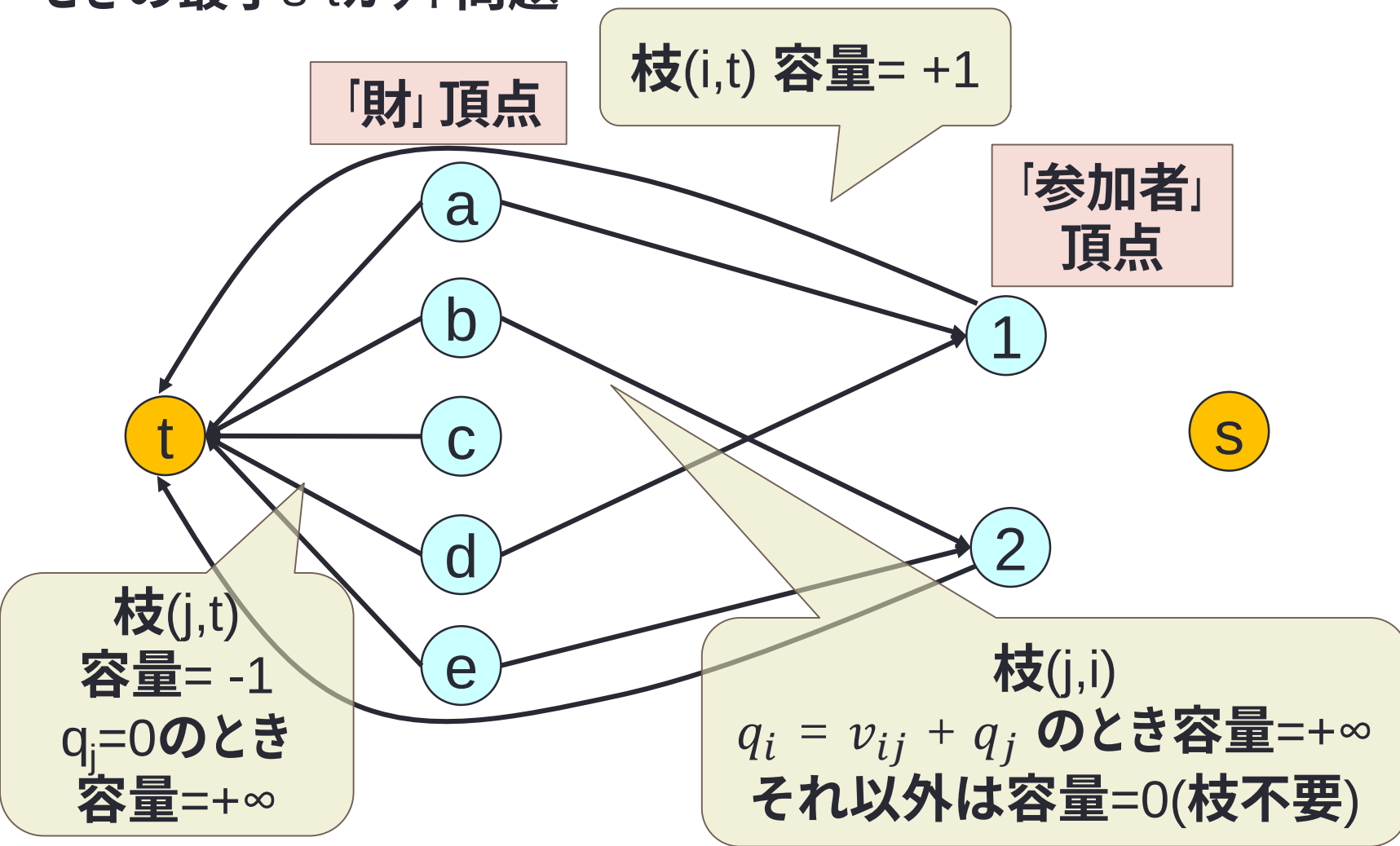
$$\begin{aligned} & (q_a, q_b, q_c) \\ &= -(p_a, p_b, p_c) \\ &= -(4, 6, 7) \end{aligned}$$



最小s-tカットの容量=0
è 参加者1,2,3の一部からなる, いずれの
グループにも需要が十分ある
(実は均衡価格である)

最小s-tカットへの帰着 (その1)

「最小化 $g(q + e_x) - g(q)$ 条件 $q + e_x$ は実行可能解」を計算するときの最小s-tカット問題



最小s-tカットの解釈 (その1)

最小s-tカット問題---「どの財の価格を減らすと良いか」

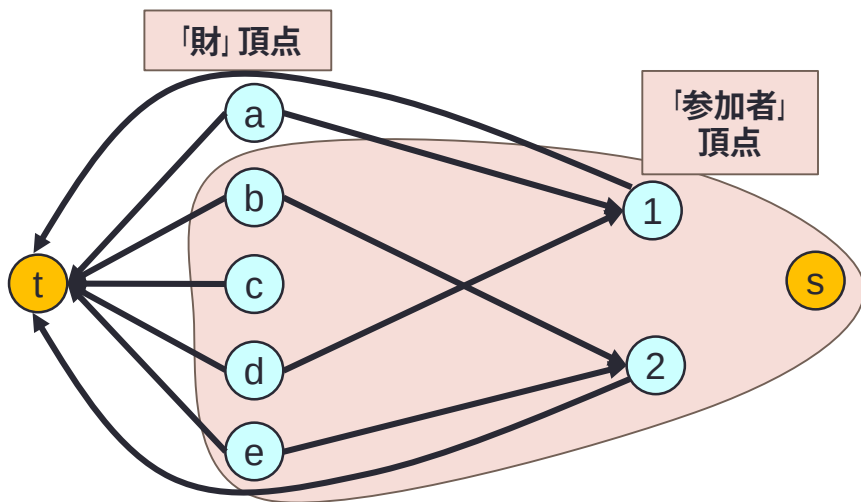
容量が有限のカット($X \cup \{s\}, Y \cup \{t\}$) ($Y = M \cup N - X$) の性質

- カットの容量 = $|X \cap M| - |X \cap N|$

- 容量 ∞ の枝を含まない

è 各財 $j \in X \cap N$ に対し, $q_j > 0$

各財 $j \in X \cap N$ に対し, j を欲しい参加者 $\in X \cap M$



よって, **最小カットの容量が負**

è $|X \cap M| < |X \cap N|$

è $X \cap N$ 内の財を欲する参加者数
 $< X \cap N$ 内の財の数

アルゴリズムでは, 最小s-tカットに
 対応する幾つかの変数を増やす
 ---需要過多の財の価格減少に対応

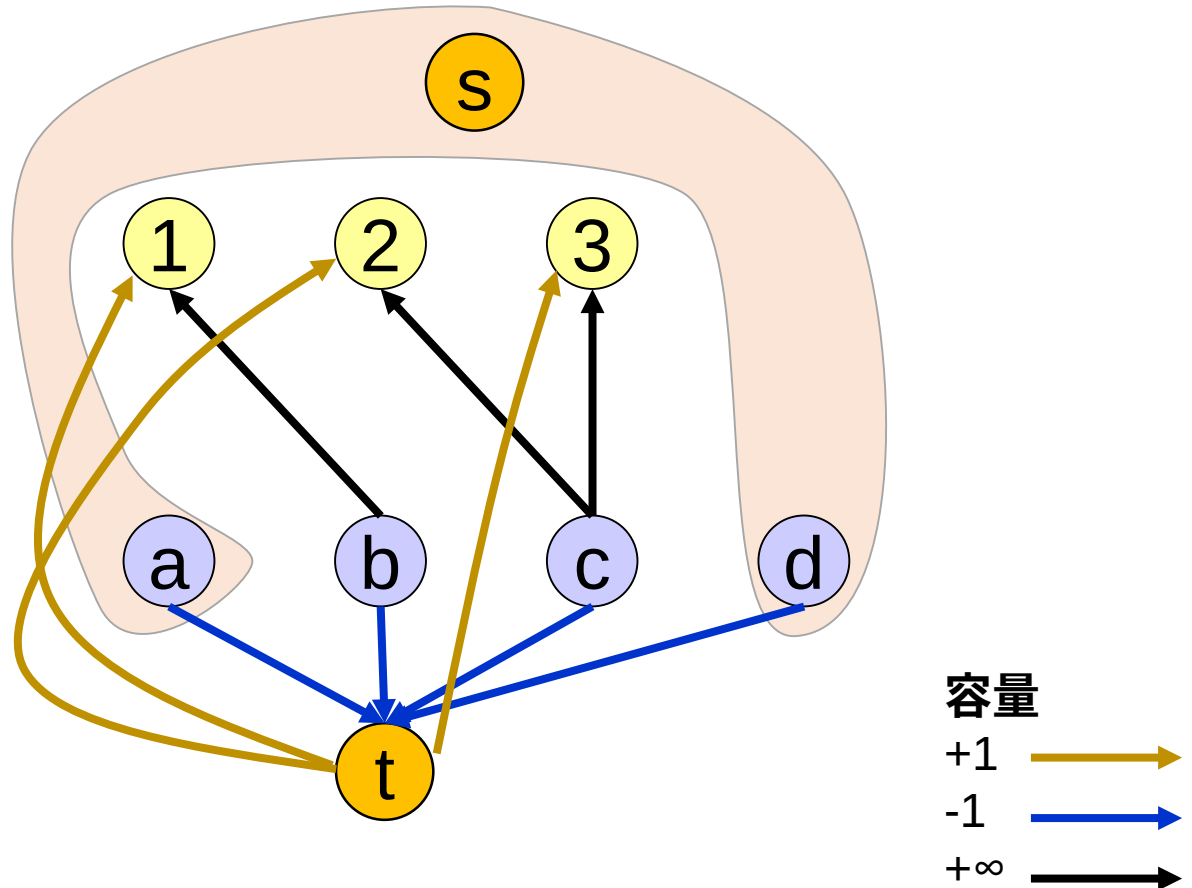
具体例1に対するアルゴリズムの適用

アルゴリズムその3 (単調増加型) を適用

$v_{ij} - p_j$	①	②	③
a	-3	-5	-6
b	1	0	1
c	-5	1	2
d	-6	-6	-2

変数の初期値

$$\begin{aligned} & (q_a, q_b, q_c, q_d) \\ &= -(p_a, p_b, p_c, p_d) \\ &= -(6, 6, 6, 6) \end{aligned}$$



財{a,b,d}を欲しい参加者は1のみ
(需要不足)

è a,b,d の価格を増やす (q_a, q_b, q_d を増やす)

