

経済学特講II 第9回

競争均衡の計算のための 繰り返しオークションの数理 ---離散凸解析の視点からの理解---

塩浦昭義

今日の内容

- 最小重みテンション問題の最適性条件の判定方法
- unit-demand valuation に関する均衡計算への応用
- アルゴリズム

最小重みテンション問題の最適性条件

最小重みテンション問題 (関数 g_{ij} , g_j は凸関数)

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_{ij}(q_i - q_j) + \sum_{j=1}^n g_j(q_j) \\ \text{条件} \quad & a_{ij} \leq q_i - q_j \leq b_{ij} \quad (1 \leq \forall i < \forall j \leq n) \\ & a_j \leq q_j \leq b_j \quad (1 \leq \forall j \leq n), \text{ 各 } q_j \text{ は整数} \end{aligned}$$

定理: ベクトル $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ は最適解

ζ は 任意の $X \subseteq \{1, \dots, n\}$ に対し,

$$q^* + e_X \text{ が実行可能解} \Rightarrow g(q^* + e_X) \geq g(q^*)$$

$$q^* - e_X \text{ が実行可能解} \Rightarrow g(q^* - e_X) \geq g(q^*)$$

最適性条件の判定方法

最適性条件の判定方法

定理: ベクトル $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ は最適解

ζ は 任意の $X \subseteq \{1, \dots, n\}$ に対し,

$q^* + e_X$ が実行可能解 $\Rightarrow g(q^* + e_X) \geq g(q^*)$

$q^* - e_X$ が実行可能解 $\Rightarrow g(q^* - e_X) \geq g(q^*)$

$g(q^* + e_X)$ を最小にする X , $g(q^* - e_Y)$ を最小にする Y を計算できれば良い

- 単純なやり方: すべて X, Y について試す
 - X, Y の種類は 2^n 個 $\Rightarrow$ 指数時間が必要なので遅い
- 賢いやり方: グラフの **最小s-tカット問題** に帰着
 - 効率的に (多項式時間で) 計算可能

最小s-tカット問題

- **入力**: 有向グラフ $G=(V, E)$, ただし $s, t \in V$
各枝 (u,v) の容量 $c(u,v)$
- **出力**: s-t カットの中で, カット容量が最小のもの (**最小s-tカット**)
- **定義**: 有向グラフの **s-t カット** $(X, V-X)$

ζ は グラフの頂点集合の分割,
ただし $s \in X, t \in V - X$

枝集合 $E(X, V - X) = X$ の頂点から
 $V-X$ の頂点に向かう枝すべて

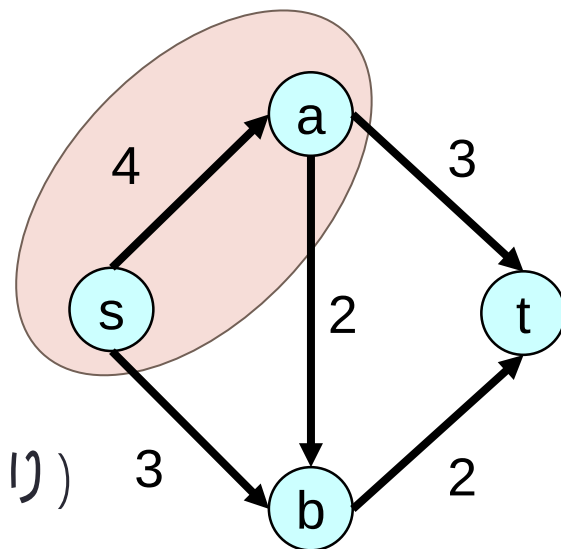
s-t カット X の **カット容量** $c(X, V-X)$

$= E(X, V - X)$ に含まれる枝の容量の和

- 各枝の容量が**非負**ならば, 最小s-tカットは
効率的に計算できる (**最大流最小カット定理**より)

頂点集合 $(\{s, a\}, \{b, t\})$ は
s-tカット

カット容量 $= 3+2+3=8$



局所最小化から最小s-tカットへの帰着(その1)

「最小化 $g(q + e_X) - g(q)$ 条件 $X \subseteq N$, $q + e_X$ は実行可能」
を計算したい

- 考え方: 頂点集合 $V = \{s, t\} \subseteq N$ のグラフを使う

$$c(X \cup \{s\}, (N - X) \cup \{t\}) = \begin{cases} g(q + e_X) - g(q) & (q + e_X \text{ は実行可能}) \\ +\infty & (q + e_X \text{ は実行不可能}) \end{cases}$$

となるように枝容量を設定

$$\begin{aligned} c(X \cup \{s\}, (N - X) \cup \{t\}) &= \sum_{i \in X, j \notin X} c(i, j) + \sum_{j \notin X} c(s, j) + \sum_{i \in X} c(i, t) \\ &= \sum_{i < j, i \in X, j \notin X} \{g_{ij}(q_i - q_j + 1) - g_{ij}(q_i - q_j)\} \\ &\quad + \sum_{i < j, i \notin X, j \in X} \{g_{ij}(q_i - q_j - 1) - g_{ij}(q_i - q_j)\} + \sum_{j \in X} \{g_j(q_j + 1) - g_j(q_j)\} \end{aligned}$$

枝容量の決めかた(その1)

- 枝(i,j)の容量 =
$$\begin{cases} g_{ij}(q_i - q_j + 1) - g_{ij}(q_i - q_j) & (q_i - q_j < b_{ij}) \\ +\infty & (q_i - q_j = b_{ij}) \end{cases}$$
- 枝(j,i)の容量 =
$$\begin{cases} g_{ij}(q_i - q_j - 1) - g_{ij}(q_i - q_j) & (q_i - q_j > a_{ij}) \\ +\infty & (q_i - q_j = a_{ij}) \end{cases}$$
- 枝(j,t)の容量 =
$$\begin{cases} g_j(q_j + 1) - g_j(q_j) & (q_j < b_j) \\ +\infty & (q_j = b_j) \end{cases}$$
- 枝(s,j) は無し

$(X \cup \{s\}, (N - X) \cup \{t\})$ が最小カット
 $\Rightarrow E(X \cup \{s\}, (N - X) \cup \{t\})$ は容量 $+\infty$ の枝を含まない
 $\Rightarrow$ 解を $q + e_X$ に更新後も上下限制約を満たす

具体例

最小化: $-4 \min\{q_a - q_s + 1, 0\}$

$-3 \min\{q_t - q_a + 3, 0\}$

$-2 \min\{q_b - q_a + 2, 0\}$

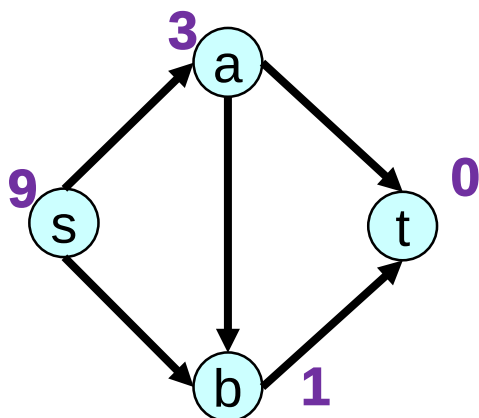
$-3 \min\{q_b - q_s + 8, 0\}$

$-2 \min\{q_t - q_b + 5, 0\}$

$-4q_s + 4q_t$

条件: $q_t = 0$

最適でない解



目的関数値

$$= -4 \min\{3 - 9 + 1, 0\}$$

$$-3 \min\{0 - 3 + 3, 0\}$$

$$-2 \min\{1 - 3 + 2, 0\}$$

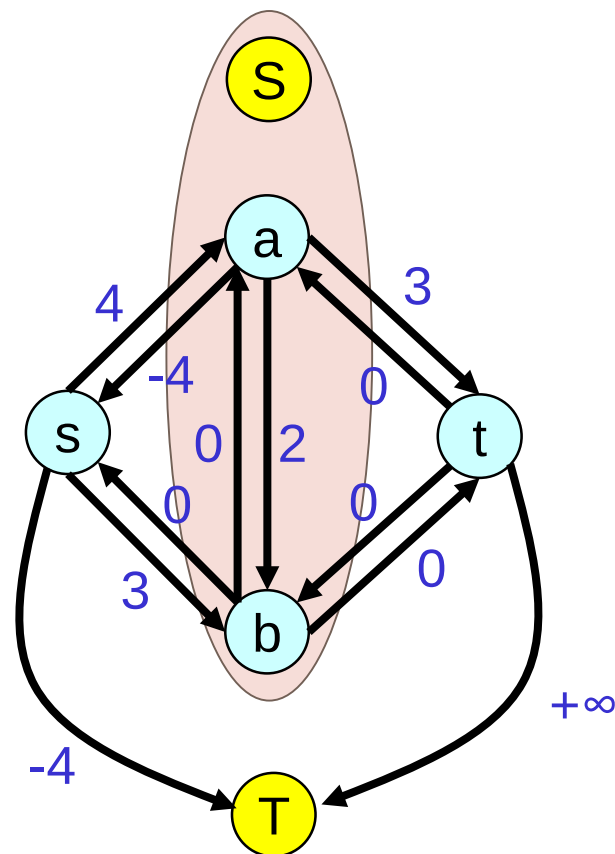
$$-3 \min\{1 - 9 + 8, 0\}$$

$$-2 \min\{0 - 1 + 5, 0\}$$

$$-4 \cdot 9 + 4 \cdot 0$$

$$= -16$$

最小s-tカット用の
ネットワーク



最小s-tカットは $(S, a, b), \{T, s, t\}$
 $\Rightarrow q_a, q_b$ を増やすと目的関数値↓

枝容量の決めかた(その2)

- 枝(i,j)の容量 =
$$\begin{cases} g_{ij}(q_i - q_j + 1) - g_{ij}(q_i - q_j) & (q_i - q_j < b_{ij}) \\ +\infty & (q_i - q_j = b_{ij}) \end{cases}$$
- 枝(j,i)の容量 =
$$\begin{cases} g_{ij}(q_i - q_j - 1) - g_{ij}(q_i - q_j) & (q_i - q_j > a_{ij}) \\ +\infty & (q_i - q_j = a_{ij}) \end{cases}$$
- 枝(j,t) は無し
- 枝(s,j)の容量 =
$$\begin{cases} g_j(q_j - 1) - g_j(q_j) & (q_j > a_j) \\ +\infty & (q_j = a_j) \end{cases}$$

変更点

($X \cup \{s\}, (N - X) \cup \{t\}$)が最小カット
 è $E(X \cup \{s\}, (N - X) \cup \{t\})$ は容量 $+\infty$ の枝を含まない
 è 解を $q - e_{N-X}$ に更新後も上下限制約を満たす

具体例

最小化: $-4 \min\{q_a - q_s + 1, 0\}$

$-3 \min\{q_t - q_a + 3, 0\}$

$-2 \min\{q_b - q_a + 2, 0\}$

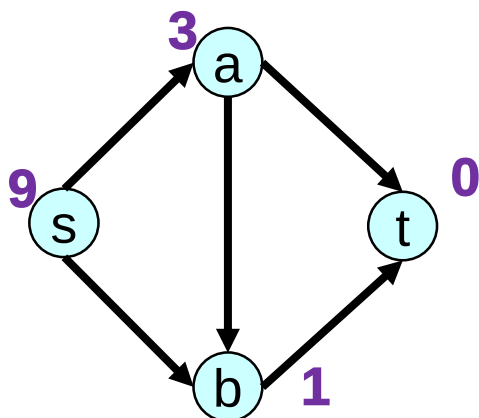
$-3 \min\{q_b - q_s + 8, 0\}$

$-2 \min\{q_t - q_b + 5, 0\}$

$-4q_s + 4q_t$

条件: $q_t = 0$

最適でない解



目的関数値

$= -4 \min\{3 - 9 + 1, 0\}$

$-3 \min\{0 - 3 + 3, 0\}$

$-2 \min\{1 - 3 + 2, 0\}$

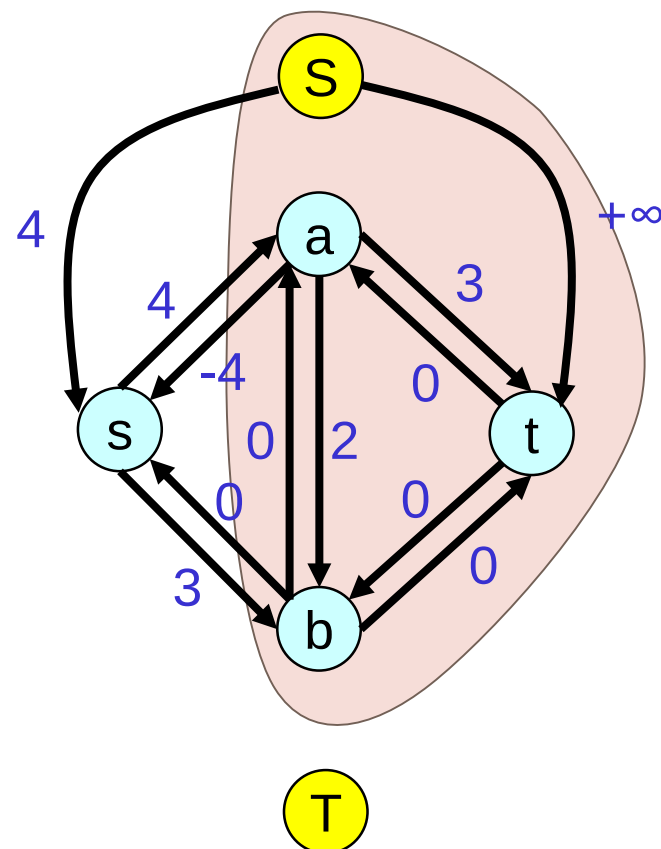
$-3 \min\{1 - 9 + 8, 0\}$

$-2 \min\{0 - 1 + 5, 0\}$

$-4 \cdot 9 + 4 \cdot 0$

$= -16$

最小s-tカット用の
ネットワーク



最小s-tカットは $(V - \{T\}, \{T\})$ など
変数を減らしても目的関数値
は減らない

unit-demand valuation の場合への
適用

unit-demand valuation の場合の双対問題 の書き換え (その1)

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & \sum_{i=1}^m \min\{0, q_t - q_i\} + \sum_{j=1}^n q_j - nq_t \\
 \text{条件1} & q_j - q_i \leq -v_{ij} \quad (\text{各財}j, \text{各参加者}i) \\
 \text{条件2} & q_j - q_0 \leq 0 \quad (\text{各財}j) \\
 \text{条件3} & q_0 - q_t \leq 0
 \end{array}$$

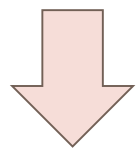
価格は
 $p_j = -q_j$

命題: $q_t = 0$ を満たす最適解が存在

$q_t = 0$ に固定, q_0 を消去

$$\begin{array}{ll}
 \text{最大化} & \sum_{i=1}^m \min\{0, -q_i\} + \sum_{j=1}^n q_j \\
 \text{条件} & q_j - q_i \leq -v_{ij} \quad (\text{各財}j, \text{各参加者}i) \\
 & q_j \leq 0 \quad (\text{各財}j)
 \end{array}$$

unit-demand valuation の場合の双対問題 の書き換え (その2)



最小化に変換, 最初の不等式を書き換え

$$\text{最小化 } g(q) \equiv \sum_{i=1}^m \max\{0, q_i\} - \sum_{j=1}^n q_j$$

$$\text{条件 } q_i \geq v_{ij} + q_j \text{ (各財 } j, \text{ 各参加者 } i)$$

$$q_j \leq 0 \quad (\text{各財 } j)$$

ある i に対し, $q_i > v_{ij} + q_j \ (\forall j), q_i > 0$ 成立

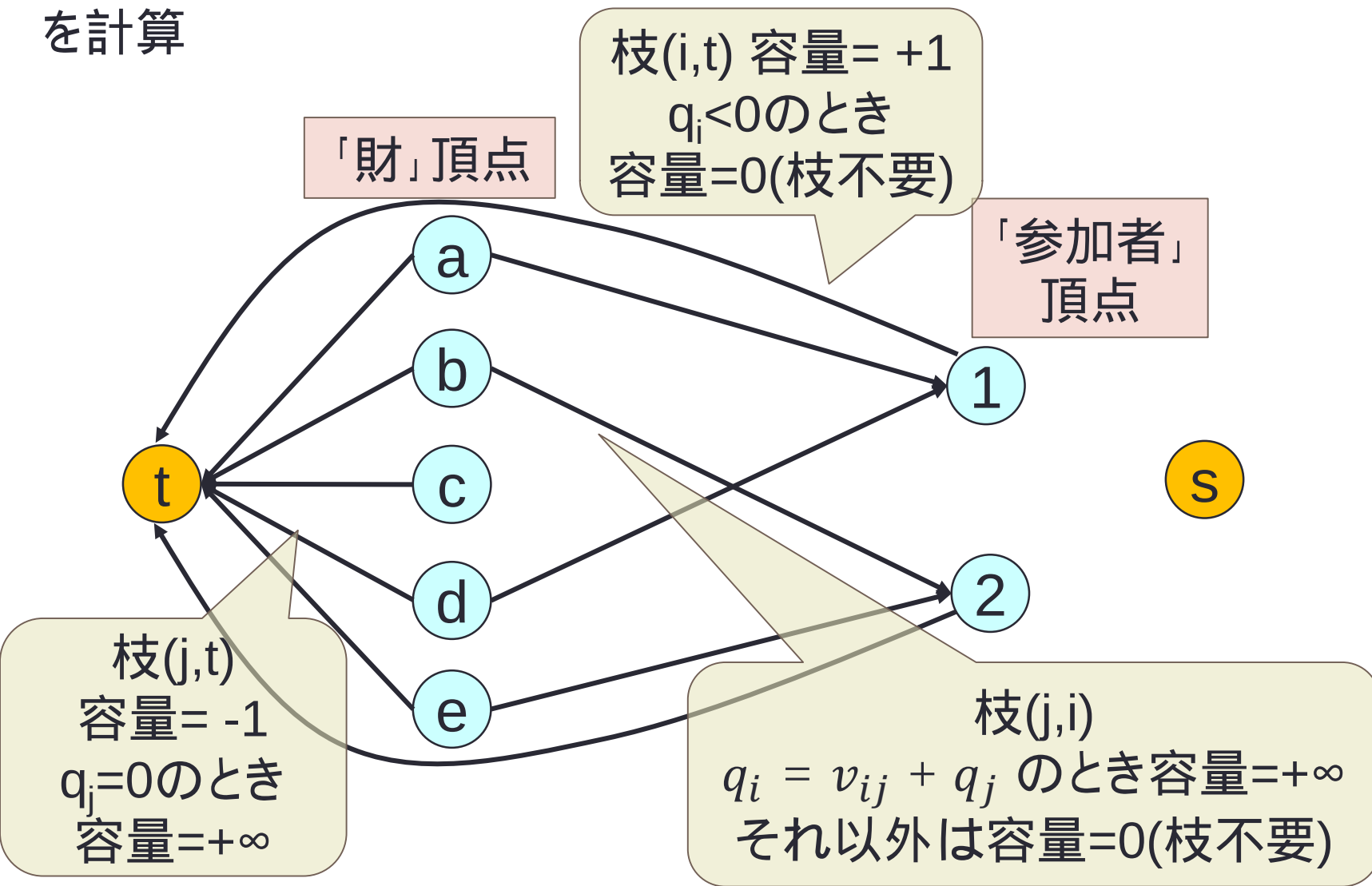
è q_i を減少でき, 減少しても目的関数値が増えない

全ての i に対し, $q_i = \max_{j \in N} \{v_{ij} + q_j\}$ の場合を考えればよい

$$N = \{1, 2, \dots, n\}, M = \{1, 2, \dots, m\}$$

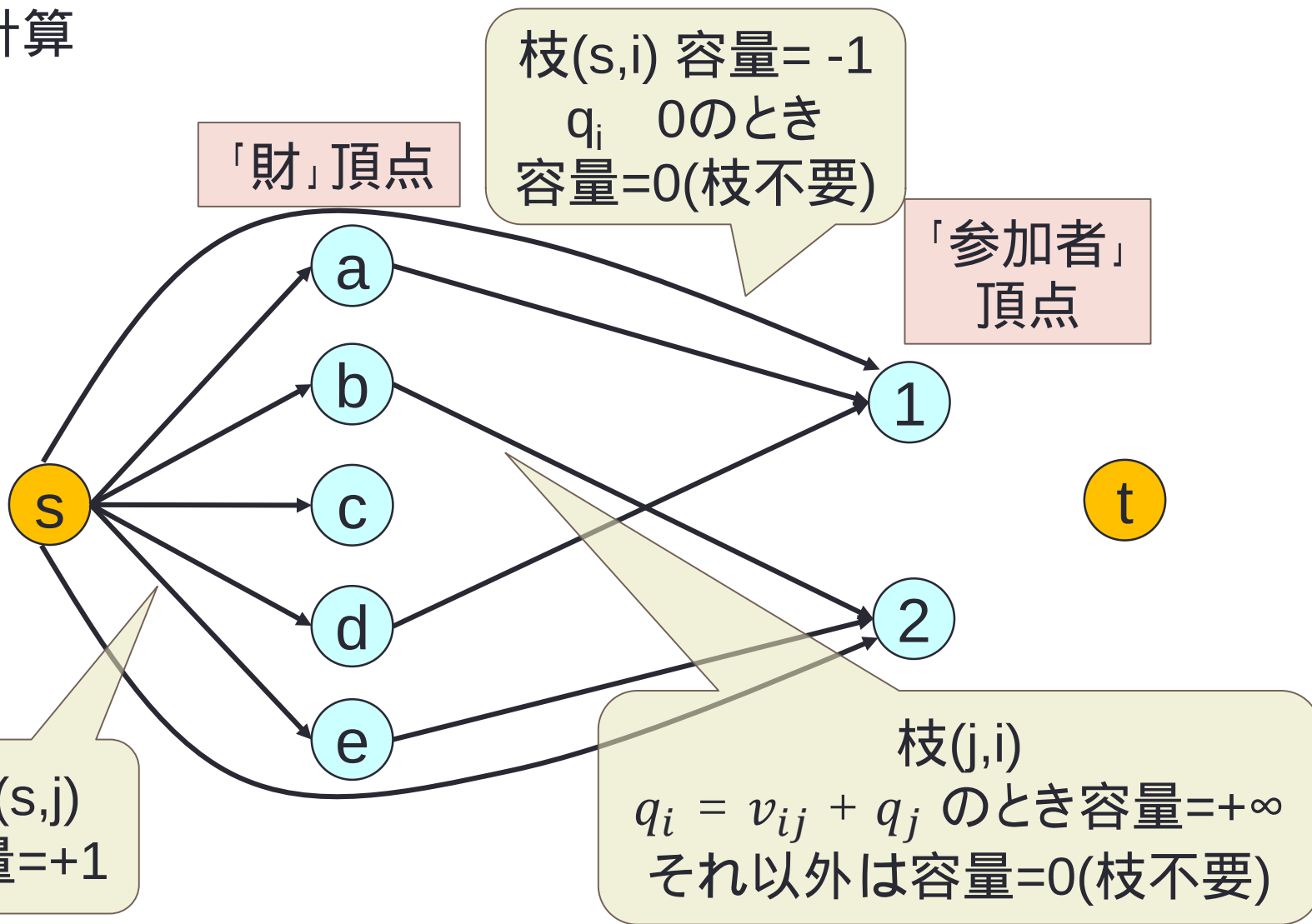
最小s-tカットへの帰着(その1)

「最小化 $g(q + e_x) - g(q)$ 条件 $\times \quad N \quad M, q + e_x$ は実行可能解」
を計算



最小s-tカットへの帰着(その2)

「最小化 $g(q - e_Y) - g(q)$ 条件 $Y \subseteq N \subseteq M$, $q - e_Y$ は実行可能解」
を計算



最小s-tカットへの帰着：グラフの作成

- 計算に使うグラフは, v_{ij} の値が不明でも計算可能
- 次の情報があれば十分
 - 各財 j の現在の価格 $p_j = -q_j$
 - 各参加者 i に対し, 最良の選択肢全て
 - $\max_{j \in N} \{v_{ij} + q_j\} > 0$: $v_{ij} + q_j$ 最大の j (最も欲しい財) 全て
 - $\max_{j \in N} \{v_{ij} + q_j\} = 0$: $v_{ij} + q_j$ 最大の j 全て, および「割当なし」
 - $\max_{j \in N} \{v_{ij} + q_j\} < 0$: 「割当なし」

最小化アルゴリズム

アルゴリズムの方針

(定理の対偶) ベクトル $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ は最適解でない
⇔ ある $X \subseteq \{1, \dots, n\}$ に対し,
 $q^* + e_X$ が実行可能解かつ $g(q^* + e_X) < g(q^*)$, または
 $q^* - e_X$ が実行可能解かつ $g(q^* - e_X) < g(q^*)$

- q が最適解でない
⇔ 関数値を下げる方向 $\pm e_X$ を見つけて, q を更新

最小重みテンション問題のアルゴリズムその1

ベクトルが上下に動きながら, 関数値を減少させる

ステップ0: 実行可能解 $q = (q_1, \dots, q_n)$ を選び, 初期解とする.

ステップ1: 次の条件を満たす $X^*, Y^* \subseteq N$ を求める:

$q + e_{X^*}$ は実行可能かつ

$$g(q + e_{X^*}) = \min\{g(q + e_X) \mid X \subseteq N, q + e_X \text{ は実行可能}\}$$

$q - e_{Y^*}$ は実行可能かつ

$$g(q - e_{Y^*}) = \min\{g(q - e_Y) \mid Y \subseteq N, q - e_Y \text{ は実行可能}\}$$

ステップ2: $g(q + e_{X^*}) \geq g(q)$ かつ $g(q - e_{Y^*}) \geq g(q)$ ならば終了.

現在の q は最適解.

ステップ3: q を $q + e_{X^*}$ または $q - e_{Y^*}$ に更新

(関数値が下がらない場合は更新しない). ステップ1へ戻る.

アルゴリズムの性質

命題: ある反復にて $g(q + e_{X^*}) \geq g(q)$ 成立

è 以降の反復でも $g(q + e_{X^*}) \geq g(q)$ 成立 (あとで証明)

è 以降はベクトルの成分を増やす必要なし

同様に,

命題: ある反復にて $g(q - e_{Y^*}) \geq g(q)$ 成立

è 以降の反復でも $g(q - e_{Y^*}) \geq g(q)$ 成立

è 以降はベクトルの成分を減らす必要なし

最小重みテンション問題のアルゴリズムその2

アルゴリズムその1の修正版:

前半ではベクトル q が単調非減少 $\rightarrow$ 後半では単調非増加

ステップ0: 実行可能解 $q = (q_1, \dots, q_n)$ を選び, 初期解とする.

ステップU1: 次の条件を満たす $X^* \subseteq N$ を求める: $q + e_{X^*}$ は実行可能かつ

$$g(q + e_{X^*}) = \min\{g(q + e_X) \mid X \subseteq N, q + e_X \text{は実行可能}\}$$

ステップU2: $g(q + e_{X^*}) \geq g(q)$ ならばステップD1へ.

ステップU3: q を $q + e_{X^*}$ に更新. ステップU1へ戻る.

ステップD1: 次の条件を満たす $X^* \subseteq N$ を求める: $q - e_{Y^*}$ は実行可能かつ

$$g(q - e_{Y^*}) = \min\{g(q - e_Y) \mid Y \subseteq N, q - e_Y \text{は実行可能}\}$$

ステップD2: $g(q - e_{Y^*}) \geq g(q)$ ならば終了. 現在の q は最適解.

ステップD3: q を $q - e_{Y^*}$ に更新. ステップD1へ戻る.

アルゴリズム実行例(1)

最小化: $-4 \min\{q_a - q_s + 1, 0\}$

$-3 \min\{q_t - q_a + 3, 0\}$

$-2 \min\{q_b - q_a + 2, 0\}$

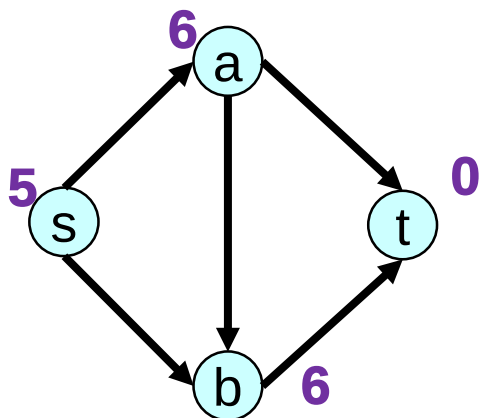
$-3 \min\{q_b - q_s + 8, 0\}$

$-2 \min\{q_t - q_b + 5, 0\}$

$-4q_s + 4q_t$

条件: $q_t = 0$

最適でない解



目的関数値

$= -4 \min\{6 - 5 + 1, 0\}$

$-3 \min\{0 - 6 + 3, 0\}$

$-2 \min\{6 - 6 + 2, 0\}$

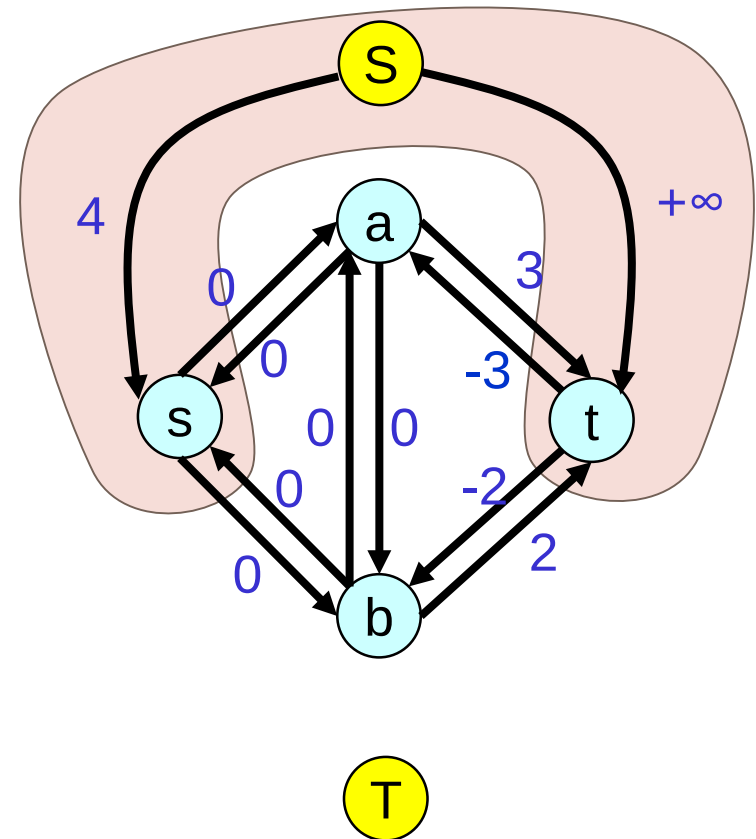
$-3 \min\{6 - 5 + 8, 0\}$

$-2 \min\{0 - 6 + 5, 0\}$

$-4 \cdot 5 + 4 \cdot 0$

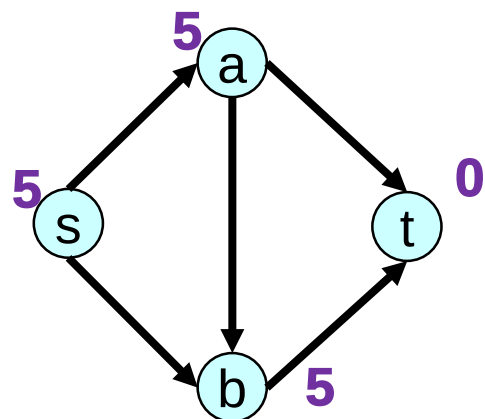
$= -9$

Y*計算用の
ネットワーク



最小s-tカットは $(\{S, s, t\}, \{T, a, b\})$
 $\Rightarrow q_a, q_b$ を減らすと目的関数値↓

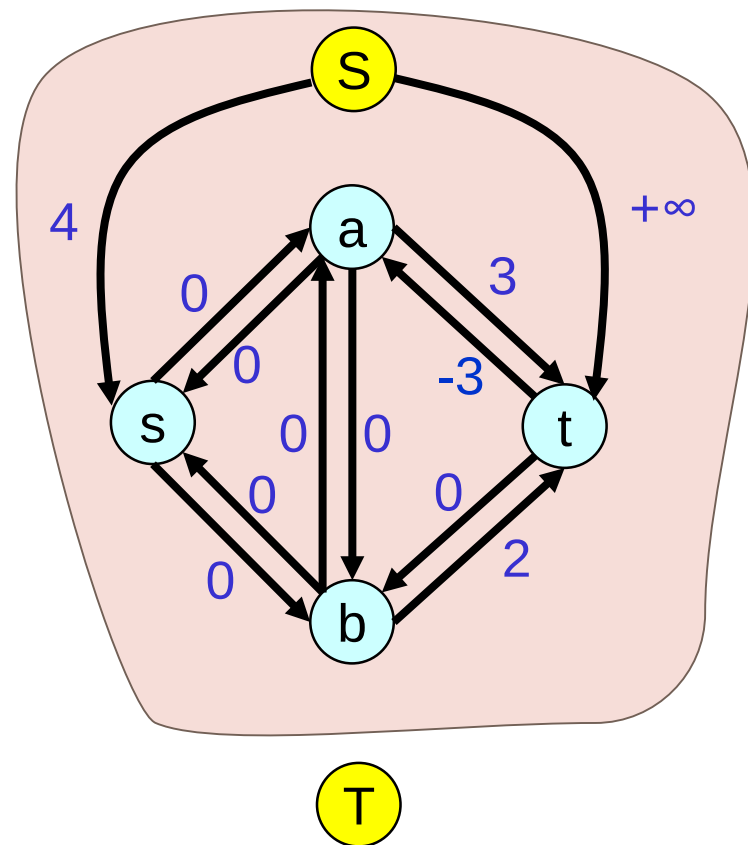
アルゴリズム実行例(2)



目的関数値

$$\begin{aligned}
 &= -4 \min\{5 - 5 + 1, 0\} \\
 &\quad -3 \min\{0 - 5 + 3, 0\} \\
 &\quad -2 \min\{5 - 5 + 2, 0\} \\
 &\quad -3 \min\{5 - 5 + 8, 0\} \\
 &\quad -2 \min\{0 - 5 + 5, 0\} \\
 &\quad -4 \cdot 5 + 4 \cdot 0 \\
 &= -14
 \end{aligned}$$

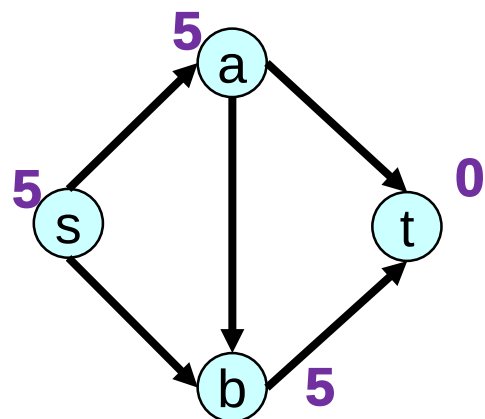
Y*計算用の
ネットワーク



最小s-tカットは $(V - \{T\}, \{T\})$, 容量 = 0

è 変数を減らすしても目的関数値は減らない

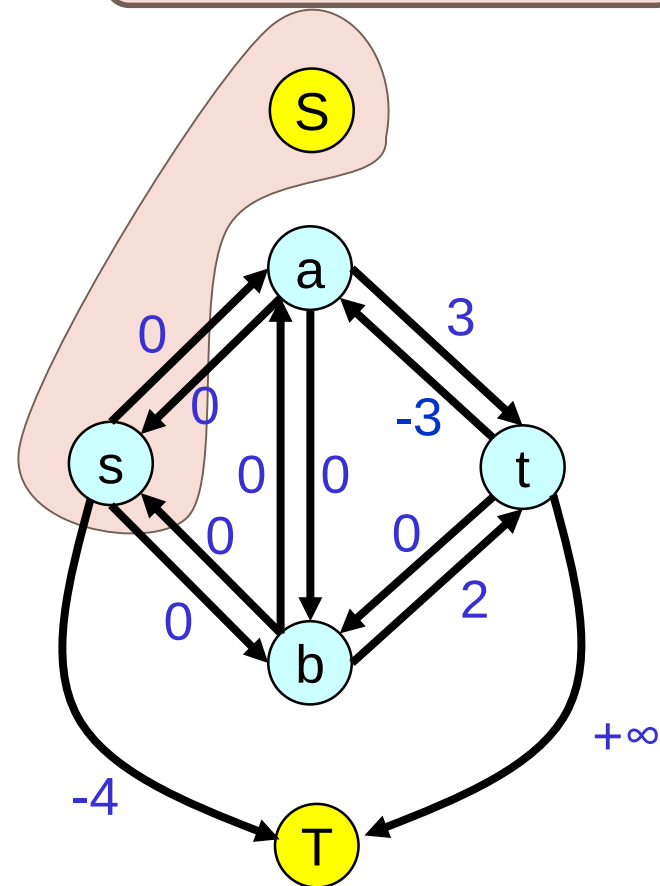
アルゴリズム実行例(3)



目的関数値

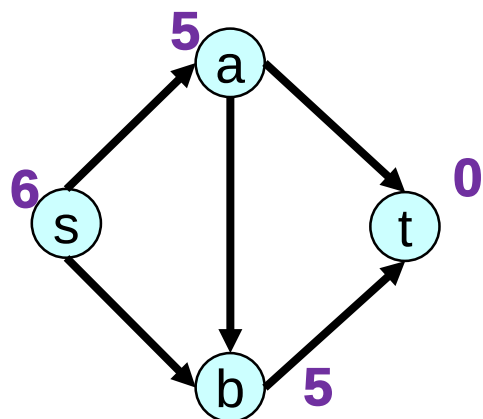
$$\begin{aligned}
 &= -4 \min\{5 - 5 + 1, 0\} \\
 &\quad -3 \min\{0 - 5 + 3, 0\} \\
 &\quad -2 \min\{5 - 5 + 2, 0\} \\
 &\quad -3 \min\{5 - 5 + 8, 0\} \\
 &\quad -2 \min\{0 - 5 + 5, 0\} \\
 &\quad -4 \cdot 5 + 4 \cdot 0 \\
 &= -14
 \end{aligned}$$

X*計算用の
ネットワーク



最小s-tカットは($\{S, s\}, \{T, a, b, t\}$)
 $\Rightarrow q_s$ を増やすと目的関数値↓

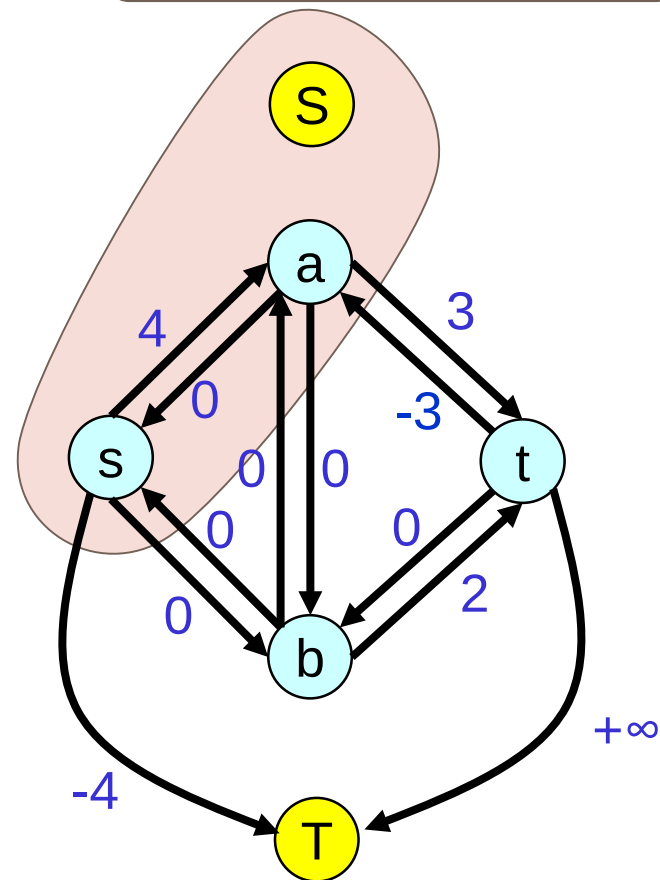
アルゴリズム実行例(4)



目的関数値

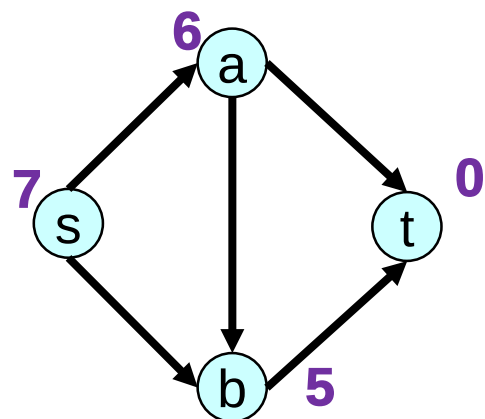
$$\begin{aligned}
 &= -4 \min\{5 - 6 + 1, 0\} \\
 &\quad -3 \min\{0 - 5 + 3, 0\} \\
 &\quad -2 \min\{5 - 5 + 2, 0\} \\
 &\quad -3 \min\{5 - 6 + 8, 0\} \\
 &\quad -2 \min\{0 - 5 + 5, 0\} \\
 &\quad -4 \cdot 6 + 4 \cdot 0 \\
 &= -18
 \end{aligned}$$

X*計算用の
ネットワーク



最小s-tカットは($\{S, s, a\}, \{T, b, t\}$)
 $\Rightarrow q_s, q_a$ を増やすと目的関数値↓

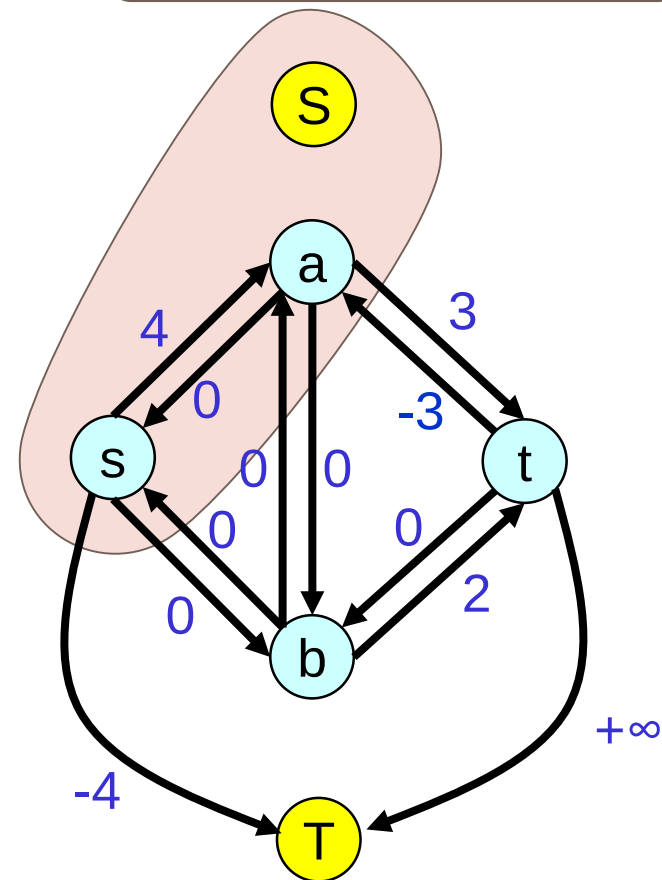
アルゴリズム実行例(5)



目的関数値

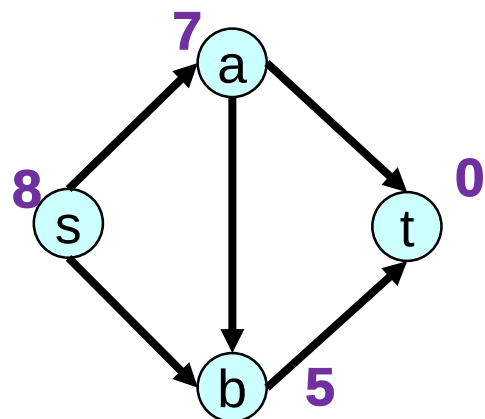
$$\begin{aligned}
 &= -4 \min\{6 - 7 + 1, 0\} \\
 &\quad -3 \min\{0 - 6 + 3, 0\} \\
 &\quad -2 \min\{5 - 6 + 2, 0\} \\
 &\quad -3 \min\{5 - 7 + 8, 0\} \\
 &\quad -2 \min\{0 - 5 + 5, 0\} \\
 &\quad -4 \cdot 7 + 4 \cdot 0 \\
 &= -19
 \end{aligned}$$

X*計算用の
ネットワーク



最小s-tカットは($\{S, s, a\}, \{T, b, t\}$)
 $\Rightarrow q_s, q_a$ を増やすと目的関数値↓

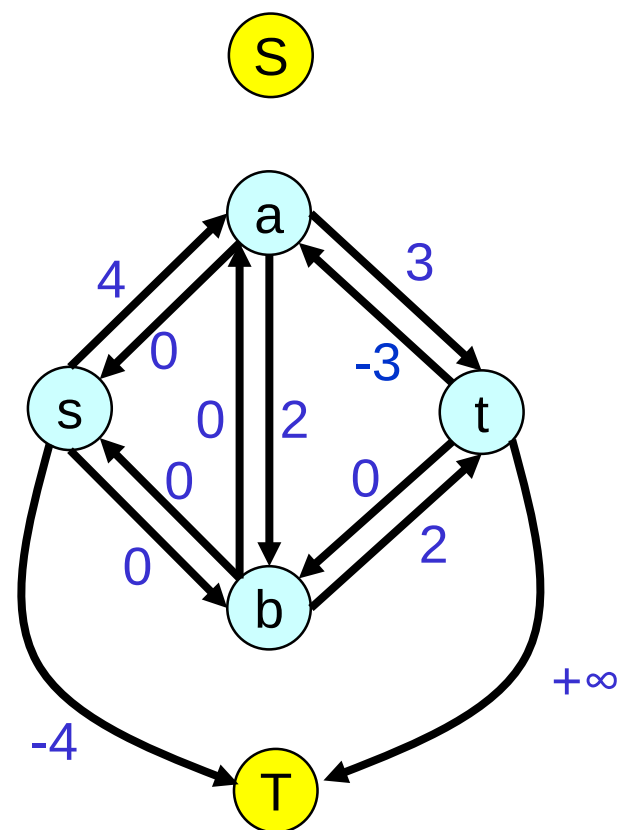
アルゴリズム実行例(6)



目的関数値

$$\begin{aligned}
 &= -4 \min\{7 - 8 + 1, 0\} \\
 &\quad -3 \min\{0 - 7 + 3, 0\} \\
 &\quad -2 \min\{5 - 7 + 2, 0\} \\
 &\quad -3 \min\{5 - 8 + 8, 0\} \\
 &\quad -2 \min\{0 - 5 + 5, 0\} \\
 &\quad -4 \cdot 8 + 4 \cdot 0 \\
 &= -20
 \end{aligned}$$

X*計算用の
ネットワーク



最小s-tカットは $(\{S\}, V - \{S\})$, 容量 = 0
 $\Rightarrow$ 変数を増やしても目的関数値は減らない

最適解の上界・下界の性質

命題: ベクトル q はある最適解 q^* の上界($q \geq q^*$)

è $g(q + e_{X^*}) \geq g(q)$ 成立

è ベクトルの成分を増やす必要なし

同様に,

命題: ベクトル q はある最適解 q^* の下界($q \leq q^*$)

è $g(q - e_{Y^*}) \geq g(q)$ 成立

è ベクトルの成分を減らす必要なし

アルゴリズムその3: 単調増加型

アルゴリズムその2の修正版:

ベクトル q が単調非減少

ステップ0: ある最適解の下界となる実行可能解 $q = (q_1, \dots, q_n)$ を選び, 初期解とする.

ステップ1: 次の条件を満たす $X^* \subseteq N$ を求める:

$q + e_{X^*}$ は実行可能かつ

$g(q + e_{X^*}) = \min\{g(q + e_X) | X \subseteq N, q + e_X \text{は実行可能}\}$

ステップ2: $g(q + e_{X^*}) \geq g(q)$ ならば終了. 現在の q は最適解.

ステップ3: q を $q + e_{X^*}$ に更新. ステップ1へ戻る.

アルゴリズムその4: 単調減少型

アルゴリズムその2の修正版:

ベクトル q が単調非増加

ステップ0: ある最適解の上界となる実行可能解 $q = (q_1, \dots, q_n)$ を選び, 初期解とする.

ステップ1: 次の条件を満たす $Y^* \subseteq N$ を求める:

$q - e_{Y^*}$ は実行可能かつ

$g(q - e_{Y^*}) = \min\{g(q - e_Y) | Y \subseteq N, q - e_Y \text{は実行可能}\}$

ステップ2: $g(q - e_{Y^*}) \geq g(q)$ ならば終了. 現在の q は最適解.

ステップ3: q を $q - e_{Y^*}$ に更新. ステップ1へ戻る.

演習問題

次の最小重みテンション問題を考える：

$$\text{最小化 } g(q) \equiv (q_a - q_b + 1)^2 + (q_a - q_c - 3)^2 + (q_b - q_c - 4)^2 \\ + q_a^2 + q_b^2 + q_c^2$$

$$\text{条件 } 0 \leq q_a \leq 3, 0 \leq q_b \leq 3, -2 \leq q_c \leq 0$$

問1: $(q_a, q_b, q_c) = (0, 0, 0)$ とする. $g(q + e_X) = c(X, V - X)$ を満たすグラフを書き, 最小s-tカットを計算せよ.

同様に, $g(q - e_X) = c(X, V - X)$ を満たすグラフを書き, 最小s-tカットを計算せよ.

問2: 初期解を $(q_a, q_b, q_c) = (0, 0, 0)$ としてアルゴリズムその2を実行せよ. なお, 最適解は $(0, 1, -2)$ である.