

1 最小重みテンション問題の最適性条件

最大重みテンション問題

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & g(q) \equiv \sum_{(i,j) \in E} g_{ij}(q_i - q_j) + \sum_{j \in N} g_j(q_j) \\ \text{制約条件} \quad & a_{ij} \leq q_i - q_j \leq b_{ij} \quad ((i,j) \in E), \\ & a_j \leq q_j \leq b_j \quad (j \in N). \end{aligned}$$

ここで

$$N = \{1, 2, \dots, n\}, \quad E = \{(i, j) \mid i, j \in N, i < j\}$$

であり, $a_{ij}, a_j \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $b_{ij}, b_j \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, 各 $g_{ij} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ および $g_j : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ は離散凸関数とする.

命題 1.1. 各 $g_{ij} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ および $g_j : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して次の不等式が成り立つ :

$$\begin{aligned} g_{ij}(\alpha) + g_{ij}(\beta) &\geq g_{ij}(\alpha + 1) + g_{ij}(\beta - 1) \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \alpha < \beta), \\ g_j(\alpha) + g_j(\beta) &\geq g_j(\alpha + 1) + g_j(\beta - 1) \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \alpha < \beta). \end{aligned}$$

定理 1.2. ベクトル $q = (q_1, \dots, q_n)$ が最小重みテンション問題の最適解であるための必要十分条件は, 任意の $X \subseteq N$ に対して以下の条件が成り立つことである :

$$\begin{aligned} q + e_X \text{ が実行可能解ならば, } & g(q + e_X) \geq g(q) \text{ が成り立つ,} \\ q - e_X \text{ が実行可能解ならば, } & g(q - e_X) \geq g(q) \text{ が成り立つ.} \end{aligned}$$

Proof. 必要条件であることは自明なので, 十分条件であることを証明する. ベクトル $q = (q_1, \dots, q_n)$ が最適解でないと仮定し, ある $X \subseteq N$ が存在して, 以下の2条件のいずれかが成り立つことを証明する :

$$\begin{aligned} q + e_X \text{ は実行可能解であり, } & g(q + e_X) < g(q) \text{ を満たす,} \\ q - e_X \text{ は実行可能解であり, } & g(q - e_X) < g(q) \text{ を満たす.} \end{aligned}$$

$q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ は最適解とし, すべての最適解の中で

$$\alpha = \max[0, \max_{i \in N} \{q_i^* - q_i\}] + \max[0, \max_{i \in N} \{q_i - q_i^*\}]$$

を最小にすると仮定する. $\alpha = 0$ ならば $q^* = q$ となるので, $\alpha > 0$ が成り立つ. 以下では, $\max[0, \max_{i \in N} \{q_i^* - q_i\}] > 0$ と仮定し, 証明を行う ($\max[0, \max_{i \in N} \{q_i - q_i^*\}]$ の場合も同様に証明できる). つまり, ある $i \in N$ に対して $q_i^* > q_i$ が成り立つと仮定する.

ここで,

$$X = \{h \in N \mid q_h^* - q_h = \max_{i \in N} \{q_i^* - q_i\}\}$$

とおく. また,

$$q' = q + e_X, \quad q'' = q^* - e_X$$

とおく．以下で示すように，

$$a_i \leq q'_i \leq b_i \quad (i \in N), \quad (1.1)$$

$$g_i(q'_i) + g_i(q''_i) \leq g_i(q_i) + g_i(q_i^*) \quad (i \in N), \quad (1.2)$$

$$a_{ij} \leq q'_i - q'_j \leq b_{ij} \quad ((i, j) \in E), \quad (1.3)$$

$$g_{ij}(q'_i - q'_j) + g_{ij}(q''_i - q''_j) \leq g_{ij}(q_i - q_j) + g_{ij}(q_i^* - q_j^*) \quad ((i, j) \in E) \quad (1.4)$$

が成り立つ．したがって， q' は実行可能解であり，

$$g(q') + g(q'') \leq g(q) + g(q^*) \quad (1.5)$$

が得られる．ここで，

$$\max_{i \in N}[0, \max\{q''_i - q_i\}] + \max_{i \in N}[0, \max\{q_i - q''_i\}] = \alpha - 1 < \alpha$$

が成り立つので， q^* の選び方から q'' は最適解ではないことがわかる．したがって， $g(q'') > g(q^*)$ が成り立つ．よって，(1.5) より $g(q') < g(q)$ を得る．

以下では，(1.1), (1.2), (1.3), および (1.4) を証明する．

まず (1.1) および (1.2) を証明する． $i \in N \setminus X$ のときは， $q'_i = q_i$, $q''_i = q_i^*$ なので自明に成り立つ．よって， $i \in X$ の場合について考える．仮定より $q_i < q_i^*$ が成り立つ． $q'_i = q_i + 1$, $q''_i = q_i^* - 1$ なので，

$$\begin{aligned} a_i &\leq q_i < q'_i \leq q_i^* \leq b_i, \\ g_i(q'_i) + g_i(q''_i) &\leq g_i(q_i) + g_i(q_i^*) \end{aligned}$$

が得られる．不等式は命題 1.1 による．

次に (1.3) および (1.4) を証明する．

[(i) $i, j \in X$ または $i, j \in N \setminus X$ のとき] $q'_i - q'_j = q_i - q_j$ および $q''_i - q''_j = q_i^* - q_j^*$ が成り立つので，

$$a_{ij} \leq q'_i - q'_j \leq b_{ij}, \quad g_{ij}(q'_i - q'_j) + g_{ij}(q''_i - q''_j) = g_{ij}(q_i - q_j) + g_{ij}(q_i^* - q_j^*)$$

が得られる．

[(ii) $i \in X$ かつ $j \in N \setminus X$ のとき] X の定義より $q_i^* - q_i > q_j^* - q_j$ が成り立つが，この不等式から

$$q_i^* - q_j^* > q_i - q_j$$

が得られる． $q'_i - q'_j = (q_i + 1) - q_j = (q_i - q_j) + 1$ および $q''_i - q''_j = (q_i^* - 1) - q_j^* = (q_i^* - q_j^*) - 1$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} a_{ij} &\leq q_i - q_j < q'_i - q'_j \leq q_i^* - q_j^* \leq b_{ij}, \\ a_{ij} &\leq q_i - q_j \leq q''_i - q''_j < q_i^* - q_j^* \leq b_{ij}, \\ g_{ij}(q'_i - q'_j) + g_{ij}(q''_i - q''_j) &\leq g_{ij}(q_i - q_j) + g_{ij}(q_i^* - q_j^*) \end{aligned}$$

を得る．

[(iii) $i \in N \setminus X$ かつ $j \in X$ のとき] (ii) と同様にして証明できる．□