経済学特講II 第8回

競争均衡の計算のための
繰り返しオークションの数理
---離散凸解析の視点からの理解---

塩浦昭義

今日の内容
- 最小重みテンション問題
- 最適性条件
- アルゴリズム

これまでのおさらいと今後の流れ

- 均衡価格（と均衡配分）を計算したい
  - とくに unit-demand valuation の場合に注目
- 均衡配分の計算：最小費用流問題に帰着可能
- 均衡価格の計算：最小費用流問題の双対に帰着可能

均衡価格の計算方法

- その１：均衡配分を求める è その情報を使って，均衡価格を計算
  - 最小費用流問題を解く è 相補性定理の利用
  - 問題点：効用関数値（満足度）の情報が必要
- その２：均衡価格を直接計算
  - 双対問題を直接解く
  - 利点：効用関数値が不明でも使えるアプローチ

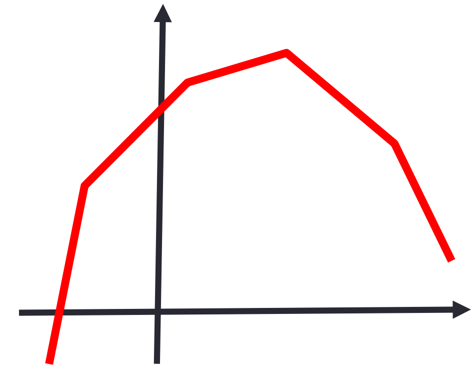
最小重みテンション問題と
その最適性条件

双対問題の一般化

最大化： $\sum_{(u,v)\in\tilde{E}} c_{uv}\cdot\min\{q_v - q_u + \gamma_{uv}, 0\} + \sum_{u\in V} b_u q_u$
条件： $q_u - q_v \le \gamma_{uv} \;\; \left(\forall(u,v)\in E\setminus\tilde{E}\right)$
$q_t = 0$

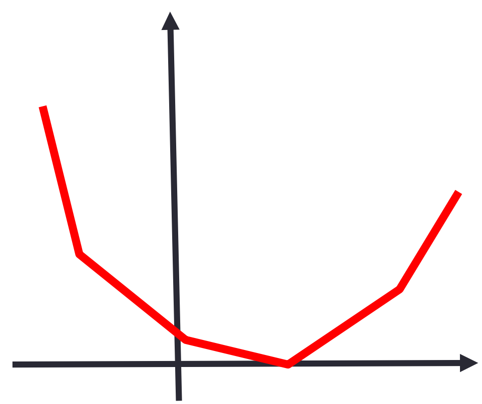
より一般的な問題 (最大重みテンション問題) 関数f_{ij}, f_j は凹関数

最大化 $\sum_{1\le i<j\le n} f_{ij}(q_i - q_j) + \sum_{j=1}^{n} f_j(q_j)$
条件 $a_{ij} \le q_i - q_j \le b_{ij}\ (1\le\forall i < \forall j \le n)$
$a_j \le q_j \le b_j\ (1\le\forall j\le n)$, 各$q_j$ は整数



最小化版 (最小重みテンション問題)
関数g_{ij}, g_j は凸関数

最小化 $\sum_{1\le i<j\le n} g_{ij}(q_i - q_j) + \sum_{j=1}^{n} g_j(q_j)$
条件 $a_{ij} \le q_i - q_j \le b_{ij}\ (1\le\forall i < \forall j \le n)$
$a_j \le q_j \le b_j\ (1\le\forall j\le n)$, 各$q_j$ は整数



最小重みテンション問題の最適性条件

記号の定義

$q = (q_1, \dots, q_n)$: **解ベクトル**

$g(q) = \sum_{1 \le i < j \le n} g_{ij}(q_i - q_j) + \sum_{j=1}^{n} g_j(q_j)$ --- **目的関数**

$X \subseteq \{1, \dots, n\}$**に対し，ベクトル**$e_X \in \{0,1\}^n$ **を以下のように定義**：

$$(e_X)_i = \begin{cases} 1 & i \in X \\ 0 & i \notin X \end{cases}$$

定理： **ベクトル** $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ **は最適解**

ç è **任意の**$X \subseteq \{1, \dots, n\}$ **に対し，**

$q^* + e_X$ **が実行可能解** è $g(q^* + e_X) \ge g(q^*)$

$q^* - e_X$ **が実行可能解** è $g(q^* - e_X) \ge g(q^*)$

（対偶） **ベクトル** $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ **は最適解でない**

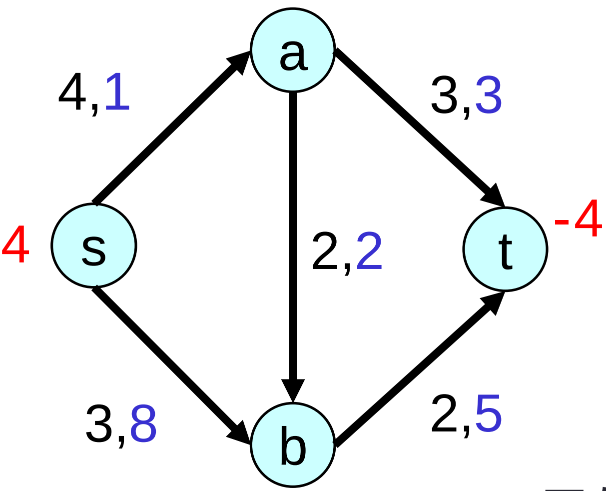
ç è **ある**$X \subseteq \{1, \dots, n\}$ **に対し，**

$q^* + e_X$ **が実行可能解かつ**$g(q^* + e_X) < g(q^*)$**，または**

$q^* - e_X$ **が実行可能解かつ**$g(q^* - e_X) < g(q^*)$

具体例

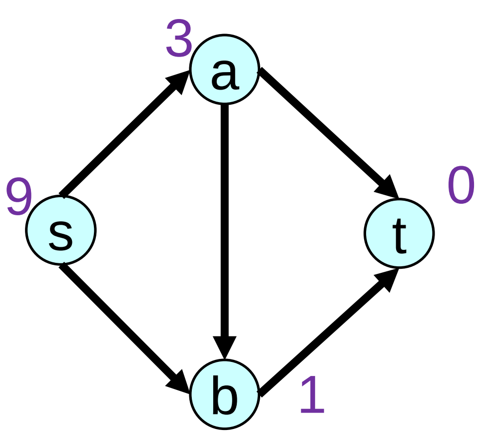
(D’)



最小化： $-4\min\{q_a - q_s + 1, 0\}$
$-3\min\{q_t - q_a + 3, 0\} - 2\min\{q_b - q_a + 2, 0\}$
$-3\min\{q_b - q_s + 8, 0\} - 2\min\{q_t - q_b + 5, 0\}$
$-4q_s + 4q_t$

条件： $q_t = 0$

最適でない解



目的関数値

$= -4\min\{3 - 9 + 1, 0\}$
$-3\min\{0 - 3 + 3, 0\}$
$-2\min\{1 - 3 + 2, 0\}$
$-3\min\{1 - 9 + 8, 0\}$
$-2\min\{0 - 1 + 5, 0\}$
$-4 \cdot 9 + 4 \cdot 0$
= -16

q_a, q_bを1増加

目的関数値

$= -4\min\{4 - 9 + 1, 0\}$
$-3\min\{0 - 4 + 3, 0\}$
$-2\min\{2 - 4 + 2, 0\}$
$-3\min\{2 - 9 + 8, 0\}$
$-2\min\{0 - 2 + 5, 0\}$
$-4 \cdot 9 + 4 \cdot 0$
= -17

最適性条件の判定方法

最適性条件の判定方法

定理: ベクトル $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ は最適解
ç è 任意の$X \subseteq \{1, \dots, n\}$ に対し,
$q^* + e_X$ が実行可能解 è $g(q^* + e_X) \leq g(q^*)$
$q^* - e_X$ が実行可能解 è $g(q^* - e_X) \leq g(q^*)$

$g(q^* + e_X)$を最大にするX，$g(q^* - e_Y)$ を最大にする Y を計算できれば判定可能

- 単純なやり方：すべて X, Y について試す
  - X, Yの種類は2^n個 è 指数時間が必要なので遅い
- 賢いやり方：グラフの**最小s-tカット問題**に帰着
  - 効率的に（多項式時間で）計算可能

最小s-tカット問題

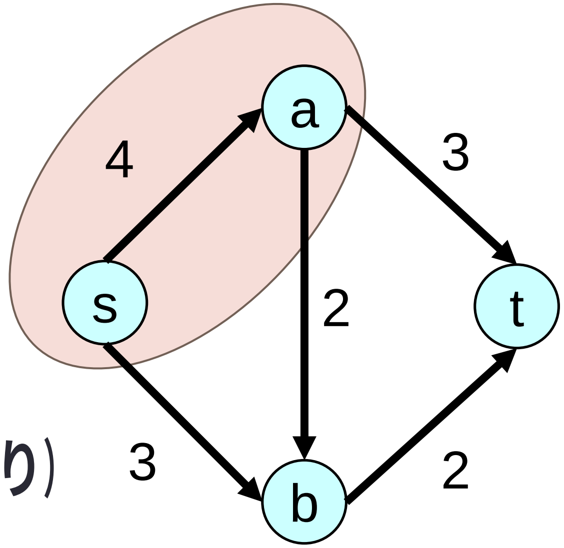
- **入力**：有向グラフ G=(V, E), ただしs, t∈V
  各枝(u,v)の容量 c(u,v)
- **出力**：s-t カットの中で, カット容量が最小のもの (**最小s-tカット**)
- **定義**：有向グラフの **s-t カット** (X,V-X)

  ç è グラフの頂点集合の分割,
  ただし$s \in X, t \in V - X$

枝集合 $E(X, V - X)$ = X の頂点から
V-X の頂点に向かう枝すべて

s-t カット X の**カット容量c(X, V-X)**
＝ $E(X, V - X)$ に含まれる枝の容量の和

頂点集合({s,a},{b,t}) は
s-tカット
カット容量＝3+2+3=8



- 各枝の容量が**非負**ならば, 最小s-tカットは
  効率的に計算できる (**最大流最小カット定理**より)

局所最小化から最小s-tカットへの帰着 (その1)

$g(q) = \sum_{1 \le i < j \le n} g_{ij}(q_i - q_j) + \sum_{j=1}^{n} g_j(q_j)$

「最小化 $g(q + e_X) - g(q)$ 条件 X⊆N」を計算したい

- 考え方：頂点集合V={s,t}∪N のグラフを使う
  カット容量$c(X, N - X) = g(q + e_X) - g(q)$となるように
  枝容量を適切に設定

$c(X, N - X) = \sum_{i \in X, j \notin X} c(i, j) + \sum_{j \notin X} c(s, j) + \sum_{i \in X} c(i, t)$

$g(q + e_X) - g(q)$

$= \sum_{\substack{i<j, \\ i \in X, j \notin X}} g_{ij}(q_i - q_j + 1) + \sum_{\substack{i<j, \\ i \notin X, j \in X}} g_{ij}(q_i - q_j - 1) + \sum_{j \in X} g_j(q_j + 1)$

  - 関数$g_{ij}(q_i - q_j)$, 不等式 $a_{ij} \le q_i - q_j \le b_{ij}$ è 枝(i,j),(j,i)の容量
  - 関数$g_j(q_j)$, 不等式 $a_j \le q_j \le b_j$ è 枝(j,t)の容量

枝容量の決めかた (その1)

- q_iが＋1, q_j不変 ß à $i \in X, j \notin X$ ß à 枝(i,j)がE(X,V-X)に含まれる

è 枝(i,j)の容量=変化量 $g_{ij}(q_i - q_j + 1) - g_{ij}(q_i - q_j)$ とする

ただし $q_i - q_j = b_{ij}$ è 枝(i,j)の容量=+∞

- 同様に, 枝(j,i)の容量=変化量 $g_{ij}(q_i - q_j - 1) - g_{ij}(q_i - q_j)$

ただし $q_i - q_j = a_{ij}$ è 枝(j,i)の容量=+∞

- q_jが＋1 ß à $j \in X, t \notin X$ ß à 枝(j,t)がE(X,V-X)に含まれる

è 枝(j,t)の容量=変化量 $g_j(q_j + 1) - g_j(q_j)$ とする

ただし $q_j = b_j$ è 枝(j,t)の容量=+∞

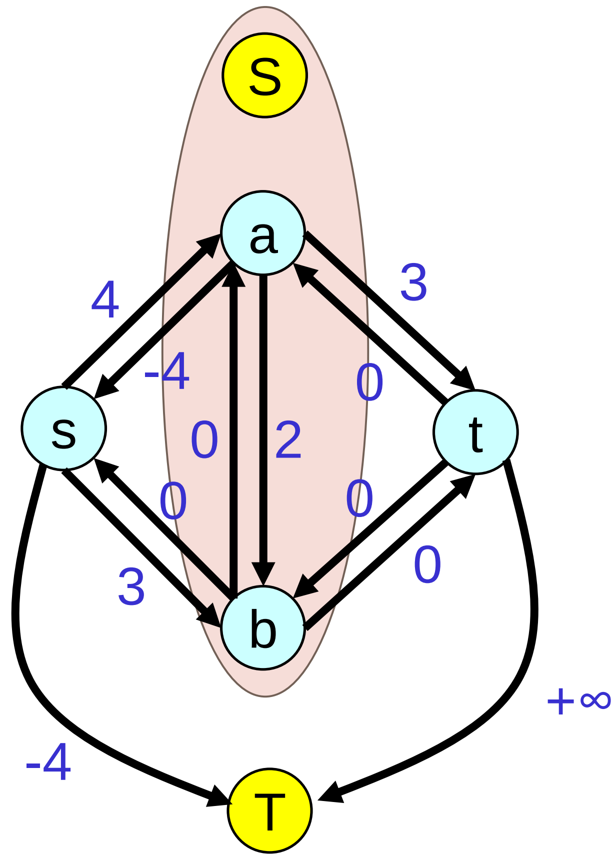
「(X,V-X)が最小カット è E(X,V-X)は容量+∞の枝を含まない」
ことに注意

具体例

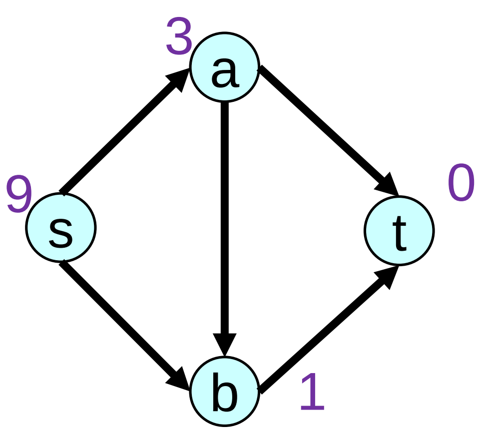
最小化：$-4\min\{q_a - q_s + 1, 0\}$
$-3\min\{q_t - q_a + 3, 0\}$
$-2\min\{q_b - q_a + 2, 0\}$
$-3\min\{q_b - q_s + 8, 0\}$
$-2\min\{q_t - q_b + 5, 0\}$
$-4q_s + 4q_t$

条件：$q_t = 0$

最小s-tカット用のネットワーク



最適でない解



目的関数値

$= -4\min\{3 - 9 + 1, 0\}$
$-3\min\{0 - 3 + 3, 0\}$
$-2\min\{1 - 3 + 2, 0\}$
$-3\min\{1 - 9 + 8, 0\}$
$-2\min\{0 - 1 + 5, 0\}$
$-4 \cdot 9 + 4 \cdot 0$
= -16

最小s-tカットは(S,a,b},{T,s,t})
è q_a, q_b**を増やすと目的関数値↓**

局所最小化から最小s-tカットへの帰着（その2）

$g(q) = \sum_{1\le i<j\le n} g_{ij}(q_i - q_j) + \sum_{j=1}^{n} g_j(q_j)$

「最小化 $g(q - e_X) - g(q)$ 条件 X⊆N」を計算したい

- 考え方：頂点集合V={s,t}∪N のグラフを使う
  カット容量$c(X, N - X) = g(q - e_{N-X}) - g(q)$となるように
  枝容量を適切に設定

$c(X, N - X) = \sum_{i\in X, j\notin X} c(i,j) + \sum_{j\notin X} c(s,j) + \sum_{i\in X} c(i,t)$

$g(q - e_{N-X}) - g(q)$

$= \sum_{\substack{i<j,\\ i\in X, j\notin X}} g_{ij}(q_i - q_j + 1) + \sum_{\substack{i<j,\\ i\notin X, j\in X}} g_{ij}(q_i - q_j - 1) + \sum_{j\in N-X} g_j(q_j - 1)$

- 関数$g_{ij}(q_i - q_j)$, 不等式 $a_{ij} \le q_i - q_j \le b_{ij}$ è 枝(i,j),(j,i)の容量
- 関数$g_j(q_j)$, 不等式 $a_j \le q_j \le b_j$ è 枝(s,j)の容量

枝容量の決めかた (その2)

- q_i不変, q_jが−1 ß à $i \in X, j \notin X$ ß à 枝(i,j)がE(X,V-X)に含まれる

è 枝(i,j)の容量=変化量 $g_{ij}\left(q_i - q_j + 1\right) - g_{ij}\left(q_i - q_j\right)$ とする

ただし $q_i - q_j = b_{ij}$ è 枝(i,j)の容量=+∞

- 同様に, 枝(j,i)の容量=変化量 $g_{ij}\left(q_i - q_j - 1\right) - g_{ij}(q_i - q_j)$

ただし $q_i - q_j = a_{ij}$ è 枝(j,i)の容量=+∞

- q_jが−1 ß à $j \notin X, s \in X$ ß à 枝(s,t)がE(X,V-X)に含まれる

è 枝(s,j)の容量=変化量 $g_j\left(q_j - 1\right) - g_j\left(q_j\right)$ とする

ただし $q_j = a_j$ è 枝(s,j)の容量=+∞

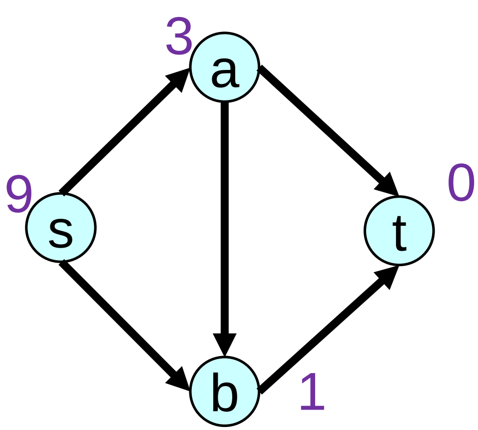
変更点

「(X,V-X)が最小カット è E(X,V-X)は容量+∞の枝を含まない」
ことに注意

具体例

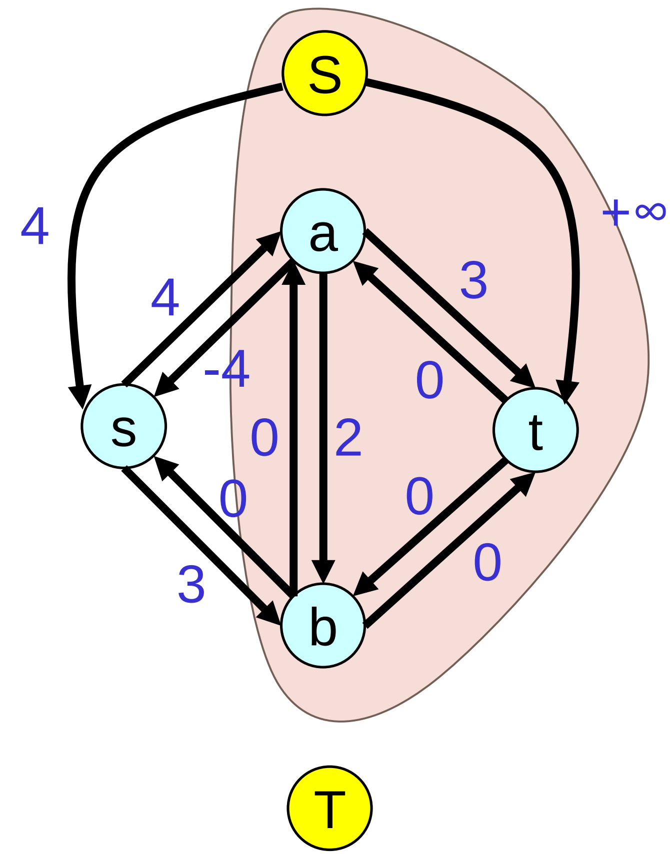
最小化：$-4\min\{q_a - q_s + 1, 0\}$
$-3\min\{q_t - q_a + 3, 0\}$
$-2\min\{q_b - q_a + 2, 0\}$
$-3\min\{q_b - q_s + 8, 0\}$
$-2\min\{q_t - q_b + 5, 0\}$
$-4q_s + 4q_t$
条件：$q_t = 0$

最適でない解



目的関数値
$= -4\min\{3 - 9 + 1, 0\}$
$-3\min\{0 - 3 + 3, 0\}$
$-2\min\{1 - 3 + 2, 0\}$
$-3\min\{1 - 9 + 8, 0\}$
$-2\min\{0 - 1 + 5, 0\}$
$-4 \cdot 9 + 4 \cdot 0$
= -16

最小s-tカット用のネットワーク



最小s-tカットは(V-{T}, {T})など
è 変数を減らしても目的関数値は減らない

枝容量を非負にする方法：その1

- 前述の最小s-tカット問題への帰着では，枝容量に負値が出現
  à 問題の特徴を生かして，非負容量の問題に変換
- あるjに対し，c(s,j)またはc(j,t)が負
  (枝が存在しない à 容量0の枝が存在すると見なす)
  è c(s,j)およびc(j,t)を一定量増やして非負にする
  (∵任意のs-tカットは(s,j)と(j,t)のどちらか一方のみ含む)

max{-c(s,j),-c(j,t)}
だけ増やせば十分

枝容量を非負にする方法：その2

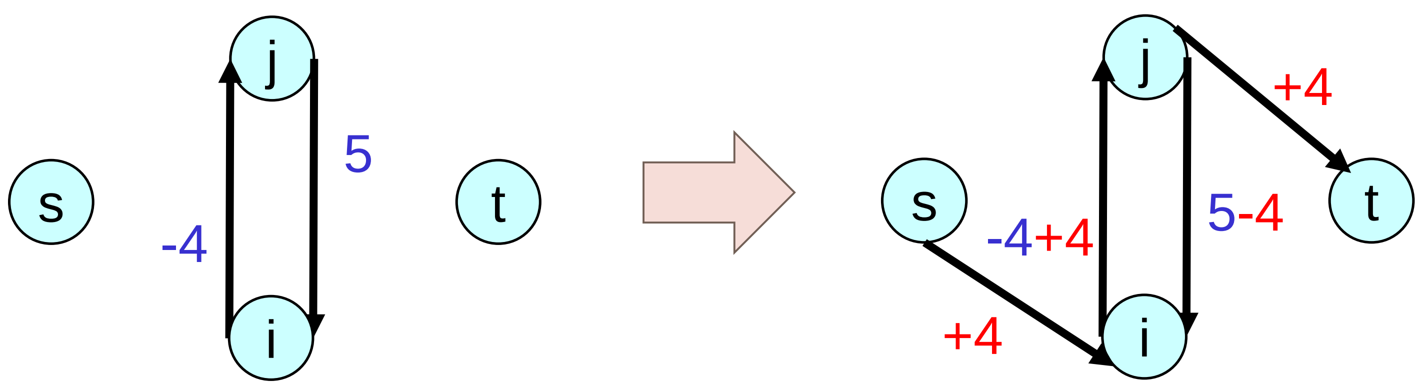
- 前述の最小s-tカット問題への帰着では，枝容量に負値が出現
  à 問題の特徴を生かして，非負容量の問題に変換
- あるi,jに対し，c(i,j)またはc(j,i)が負

è g_{ij}**が凸関数**＋枝容量の決め方より，c(i,j)+c(j,i)≧0

è c(i,j)<0のときは，c(i,j), c(s,i), c(j,t)を＋α，c(j,i)を－αだけ変更

(任意のs-tカットの容量は＋αだけ増える)

α=max{-c(i,j),-c(j,i)}
とすれば良い



最小化アルゴリズム

最小重みテンション問題のアルゴリズムその1

ベクトルが上下に動きながら，関数値を減少させる

ステップ0：実行可能解$q = (q_1, \ldots, q_n)$を選び，初期解とする．

ステップ1：次の条件を満たす$X^*, Y^* \subseteq N$ を求める：

$q + e_{X^*}$は実行可能かつ

$$g(q + e_{X^*}) = \max\{g(q + e_X) | X \subseteq N,\ q + e_X \text{は実行可能}\}$$

$q - e_{Y^*}$は実行可能かつ

$$g(q - e_{Y^*}) = \max\{g(q - e_Y) | Y \subseteq N,\ q - e_Y \text{は実行可能}\}$$

ステップ2：$g(q + e_{X^*}) \geq g(q)$かつ$g(q - e_{Y^*}) \geq g(q)$ ならば終了．

現在のqは最適解．

ステップ3： qを$q + e_{X^*}$または$q - e_{Y^*}$に更新

（関数値が下がらない場合は更新しない）．ステップ1へ戻る．

アルゴリズムの性質

ある反復にて $g(q+e_{X^*}) \geq g(p)$ 成立

è 以降の反復でも$g(q+e_{X^*}) \geq g(p)$ 成立 (証明が必要)

è ベクトルの成分を増やす必要なし

同様に,

ある反復にて $g(q-e_{Y^*}) \geq g(p)$ 成立

è 以降の反復でも$g(q-e_{Y^*}) \geq g(p)$ 成立 (証明が必要)

è ベクトルの成分を減らす必要なし

最小重みテンション問題のアルゴリズムその2

アルゴリズムその1の修正版：
前半ではベクトルqが単調非減少 à 後半では単調非増加

ステップ0：実行可能解$q = (q_1, \ldots, q_n)$を選び，初期解とする．

ステップU1：次の条件を満たす$X^* \subseteq N$ を求める：$q + e_{X^*}$は実行可能かつ
$g(q + e_{X^*}) = \max\{g(q + e_X) | X \subseteq N,\ q + e_X$は実行可能$\}$
ステップU2：$g(q + e_{X^*}) \geq g(q)$ ならばステップD1へ．
ステップU3： qを$q + e_{X^*}$に更新．ステップU1へ戻る．

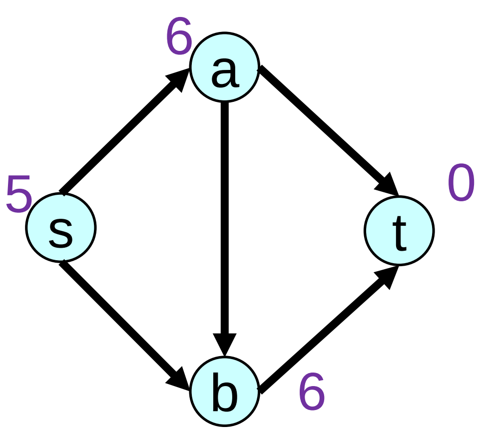
ステップD1：次の条件を満たす$X^* \subseteq N$ を求める：$q - e_{Y^*}$は実行可能かつ
$g(q - e_{Y^*}) = \max\{g(q - e_Y) | Y \subseteq N,\ q - e_Y$は実行可能$\}$
ステップD2：$g(q - e_{Y^*}) \geq g(q)$ ならば終了．現在のqは最適解．
ステップD3： qを$q - e_{Y^*}$に更新．ステップD1へ戻る．

アルゴリズム実行例 (1)

最小化：$-4\min\{q_a - q_s + 1, 0\}$
$-3\min\{q_t - q_a + 3, 0\}$
$-2\min\{q_b - q_a + 2, 0\}$
$-3\min\{q_b - q_s + 8, 0\}$
$-2\min\{q_t - q_b + 5, 0\}$
$-4q_s + 4q_t$

条件：$q_t = 0$

最適でない解

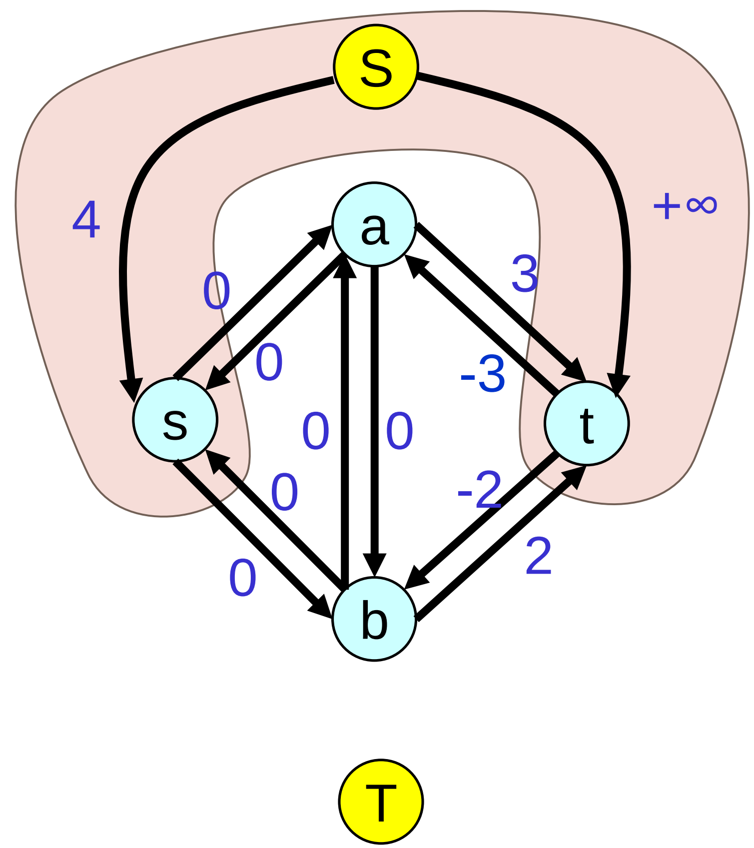


目的関数値

$= -4\min\{6 - 5 + 1, 0\}$
$-3\min\{0 - 6 + 3, 0\}$
$-2\min\{6 - 6 + 2, 0\}$
$-3\min\{6 - 5 + 8, 0\}$
$-2\min\{0 - 6 + 5, 0\}$
$- 4 \cdot 5 + 4 \cdot 0$

= -9

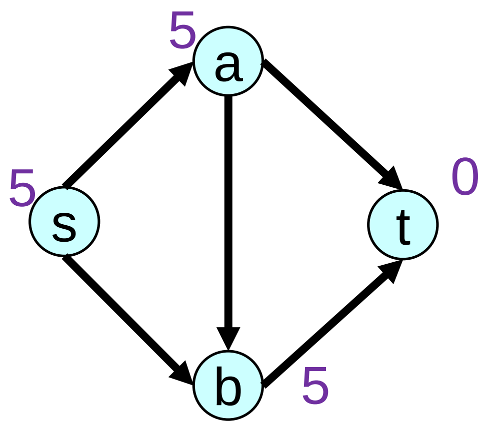
Y*計算用の
ネットワーク



最小s-t**カットは**({S,s,t},{T,a,b})

è q_a, q_b **を減らすと目的関数値↓**

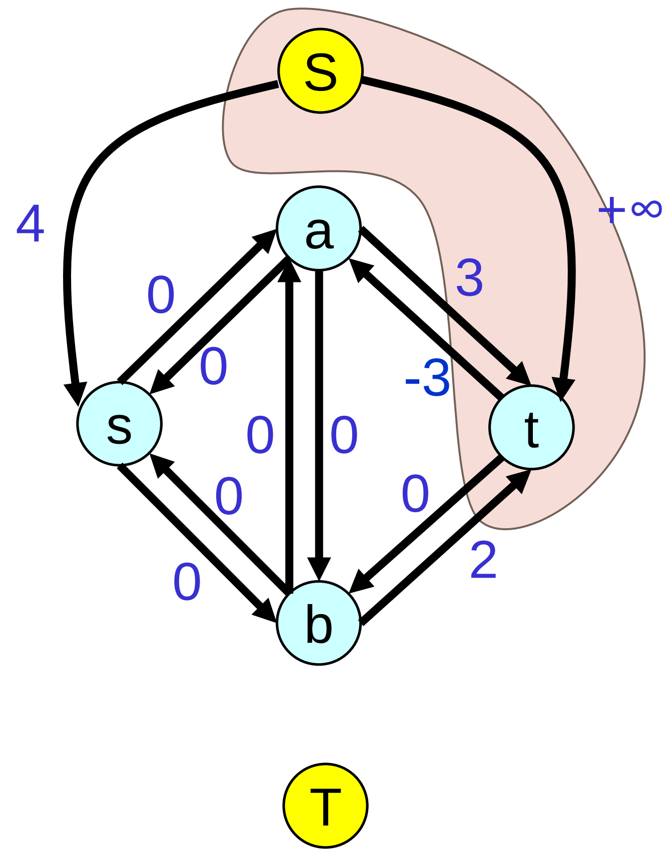
アルゴリズム実行例 (2)



目的関数値

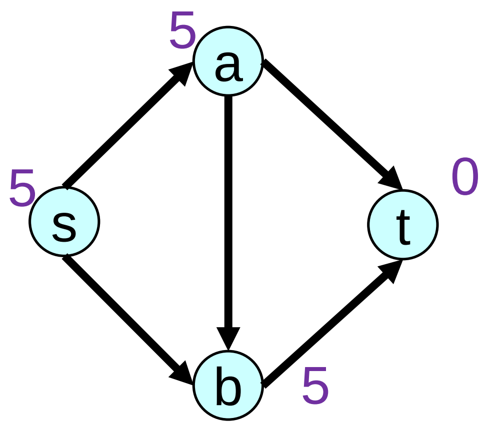
$$=-4\min\{5-5+1,0\}$$
$$-3\min\{0-5+3,0\}$$
$$-2\min\{5-5+2,0\}$$
$$-3\min\{5-5+8,0\}$$
$$-2\min\{0-5+5,0\}$$
$$-4\cdot 5+4\cdot 0$$
= -14

Y*計算用の
ネットワーク



最小s-tカットは(V-{T},{T}), **容量＝0**
è **変数を減らしても目的関数値は減らない**

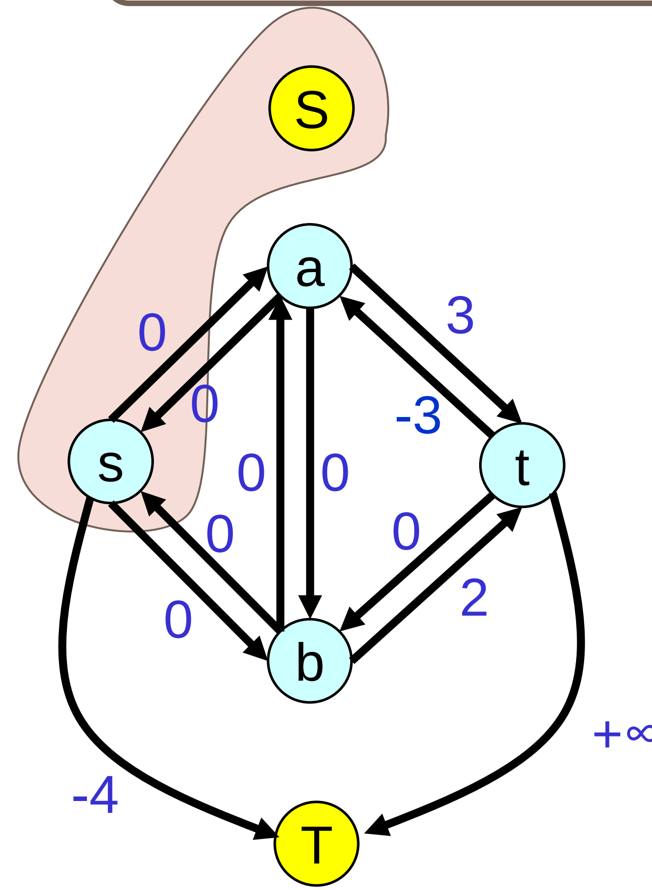
アルゴリズム実行例(3)



目的関数値

$$
\begin{aligned}
&= -4\min\{5-5+1,0\}\\
&\quad -3\min\{0-5+3,0\}\\
&\quad -2\min\{5-5+2,0\}\\
&\quad -3\min\{5-5+8,0\}\\
&\quad -2\min\{0-5+5,0\}\\
&\quad -4\cdot 5+4\cdot 0\\
&= -14
\end{aligned}
$$

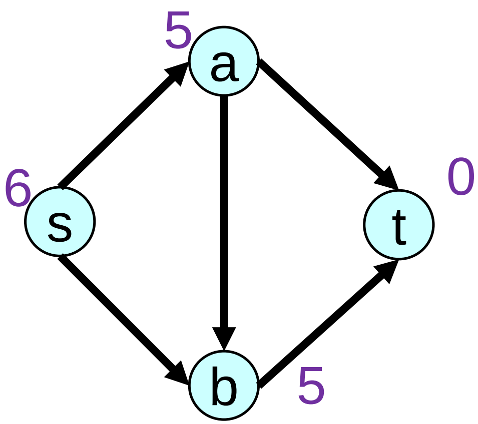
X*計算用のネットワーク



最小s-t**カットは**({S,s},{T,a,b,t})

è q_s **を増やすと目的関数値**↓

アルゴリズム実行例(4)

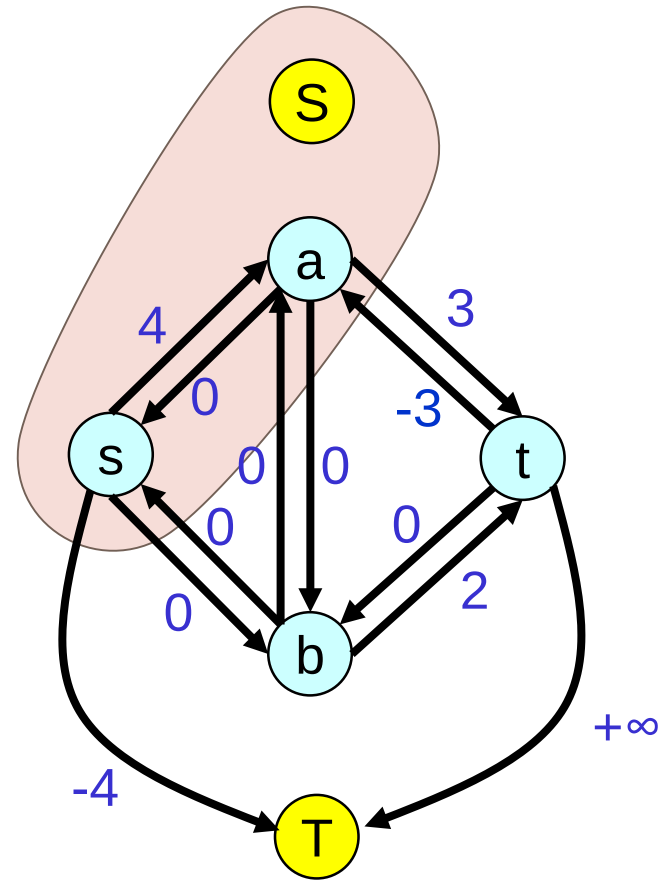


目的関数値

$$
\begin{aligned}
&= -4\min\{5-6+1,0\}\\
&\ \ -3\min\{0-5+3,0\}\\
&\ \ -2\min\{5-5+2,0\}\\
&\ \ -3\min\{5-6+8,0\}\\
&\ \ -2\min\{0-5+5,0\}\\
&\ \ -4\cdot 6+4\cdot 0
\end{aligned}
$$

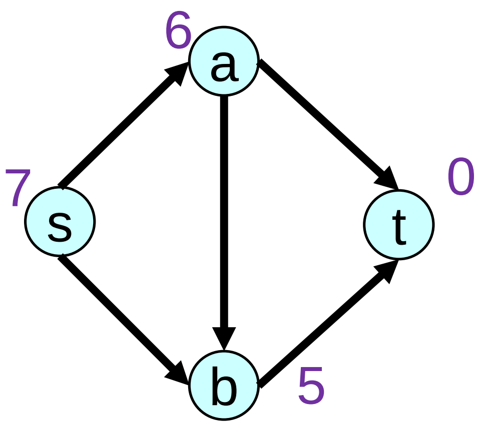
= -18

X*計算用の
ネットワーク



最小s-tカットは({S,s,a},{T,b,t})
è q_s, q_a**を増やすと目的関数値↓**

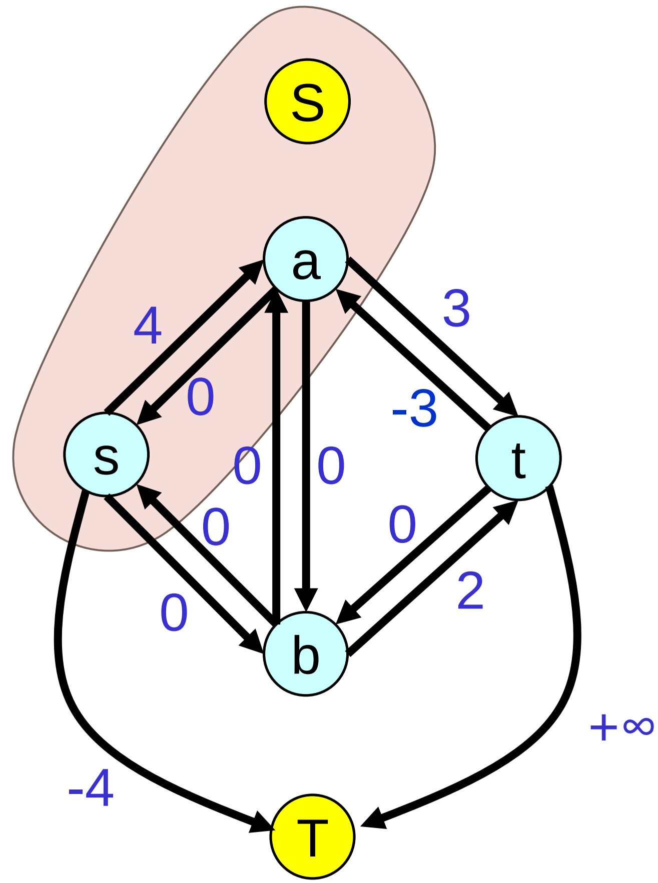
アルゴリズム実行例 (5)



目的関数値

$$= -4\min\{6-7+1, 0\}$$
$$-3\min\{0-6+3, 0\}$$
$$-2\min\{5-6+2, 0\}$$
$$-3\min\{5-7+8, 0\}$$
$$-2\min\{0-5+5, 0\}$$
$$-4\cdot 7+4\cdot 0$$
= -19

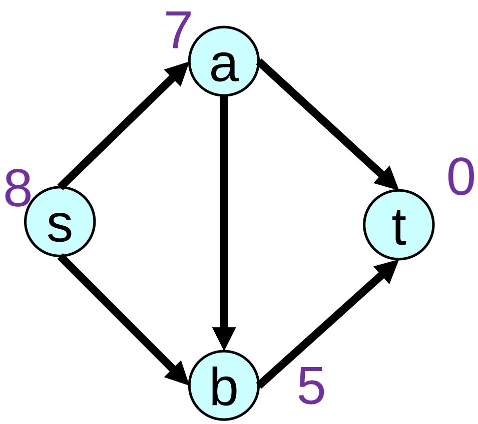
X*計算用の
ネットワーク



最小s-tカットは({S,s,a},{T,b,t})

è q_s, q_a**を増やすと目的関数値**↓

アルゴリズム実行例(6)

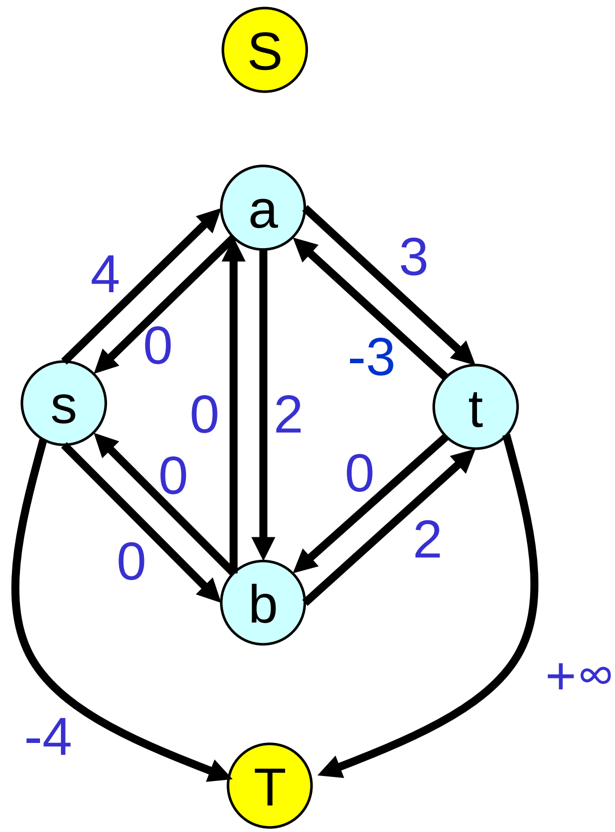


目的関数値

$$
\begin{aligned}
&= -4\min\{7-8+1,0\} \\
&\quad -3\min\{0-7+3,0\} \\
&\quad -2\min\{5-7+2,0\} \\
&\quad -3\min\{5-8+8,0\} \\
&\quad -2\min\{0-5+5,0\} \\
&\quad -4\cdot 8+4\cdot 0
\end{aligned}
$$

= -20

X*計算用の
ネットワーク



最小s-tカットは({S},V-{S})，容量＝0
è **変数を増やしても目的関数値は減らない**

演習問題

次の最小重みテンション問題を考える：

最小化 $g(q) \equiv (q_a - q_b + 1)^2 + (q_a - q_c - 3)^2 + (q_b - q_c - 4)^2 + q_a^2 + q_b^2 + q_c^2$

条件 $0 \le q_a \le 3, 0 \le q_b \le 3, -2 \le q_c \le 0$

問1：$(q_a, q_b, q_c) = (0,0,0)$とする．$g(q + e_X) = c(X, V - X)$を満たすグラフを書き，最小s-tカットを計算せよ．同様に，$g(q - e_X) = c(X, V - X)$を満たすグラフを書き，最小s-tカットを計算せよ．

問2：初期解を $(q_a, q_b, q_c) = (0,0,0)$としてアルゴリズムその2を実行せよ．なお，最適解は(1,2,-2)である．