

経済学特講II 第7回

競争均衡の計算のための 繰り返しオークションの数理 ---離散凸解析の視点からの理解---

塩浦昭義

今日の内容

- 最小費用流問題の双対問題
- 均衡価格との関係
- 最大重みテンション問題と最適性条件

これまでのおさらいと今後の流れ

- 均衡価格 (と均衡配分) を計算したい
 - とくに unit-demand valuation の場合に注目
- 均衡配分の計算: 最小費用流問題に帰着可能
- 均衡価格の計算: 最小費用流問題の双対に帰着可能

均衡価格の計算方法

- その1: 均衡配分を求める $\Rightarrow$ その情報を使って, 均衡価格を計算
 - 最小費用流問題を解く $\Rightarrow$ 相補性定理の利用
 - 問題点: 効用関数値 (満足度) の情報が必要
- その2: 均衡価格を直接計算
 - 双対問題を直接解く
 - 利点: 効用関数値が不明でも使えるアプローチ

最小費用流問題の定式化

目的: フローの総費用を最小に

$$\text{最小化: } \sum_{(u,v) \in E} \gamma_{uv} x_{uv}$$

条件1 (容量条件): $0 \leq x_{uv} \leq c_{uv} \quad (\forall (u,v) \in E)$ 各枝を流れるフローの量 枝の容量

条件2 (流量保存条件):

頂点から流れ出すフローの量 - 流れ込むフローの量
= 需要供給量

$$\sum_{v:(u,v) \in E} x_{uv} - \sum_{v':(v',u) \in E} x_{v'u} = b_u \quad (\forall u \in V)$$

(P)

$$\text{最小化: } \sum_{(u,v) \in E} \gamma_{uv} x_{uv}$$

$$\text{条件: } -x_{uv} \geq -c_{uv} \quad (\forall (u,v) \in E, c_{uv} < +\infty)$$

$$\sum_{v:(u,v) \in E} x_{uv} - \sum_{v':(v',u) \in E} x_{v'u} = b_u \quad (\forall u \in V)$$

$$x_{uv} \geq 0 \quad (\forall (u,v) \in E)$$

双対変数 s_{uv}

p_u

これは線形計画問題 $\Leftrightarrow$ 双対問題を考える

最小費用流問題の双対

(D)

最大化: $-\sum_{(u,v) \in \tilde{E}} c_{uv} s_{uv} + \sum_{u \in V} b_u q_u$

条件: $-s_{uv} + q_u - q_v \leq \gamma_{uv} \quad (\forall (u, v) \in \tilde{E})$

$q_u - q_v \leq \gamma_{uv} \quad (\forall (u, v) \in E \setminus \tilde{E})$

$s_{uv} \geq 0 \quad (\forall (u, v) \in \tilde{E})$

$\tilde{E} = \{(u, v) \in E \mid c_{uv} < +\infty\}$

$c_{uv} > 0$ なので, s_{uv} は小さいほどよい

2つの条件より, $-s_{uv} \geq \min\{q_v - q_u + \gamma_{uv}, 0\}$

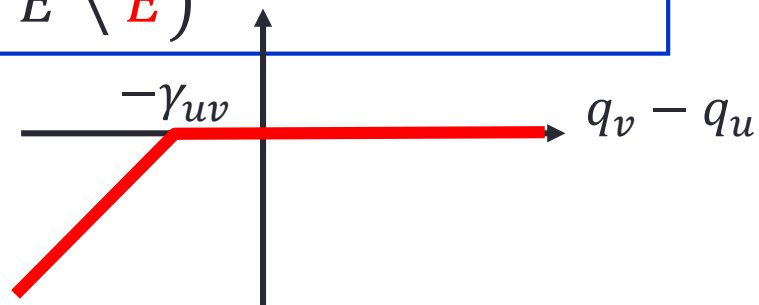
最適解では, この不等式は等号で成立

è $-s_{uv} = \min\{q_v - q_u + \gamma_{uv}, 0\}$ を代入, s_{uv} を消去すると...

(D')

最大化: $\sum_{(u,v) \in \tilde{E}} c_{uv} \cdot \min\{q_v - q_u + \gamma_{uv}, 0\} + \sum_{u \in V} b_u q_u$

条件: $q_u - q_v \leq \gamma_{uv} \quad (\forall (u, v) \in E \setminus \tilde{E})$



双対問題の解の性質

各変数を一定量増減しても, 実行可能性・目的関数値は不変

(D') 最大化: $\sum_{(u,v) \in \tilde{E}} c_{uv} \cdot \min\{q_v - q_u + \gamma_{uv}, 0\} + \sum_{u \in V} b_u q_u$
 条件: $q_u - q_v \leq \gamma_{uv} \quad (\forall (u, v) \in E \setminus \tilde{E})$

各 q_u を $q_u + \lambda$ に置き換えてみる (λ は実数)

$$\begin{aligned} (q_v + \lambda) - (q_u + \lambda) &= q_u - q_v \leq \gamma_{uv} \quad (\forall (u, v) \in E \setminus \tilde{E}) \\ \sum_{(u,v) \in E} c_{uv} \cdot \min\{(q_v + \lambda) - (q_u + \lambda) + \gamma_{uv}, 0\} &+ \sum_{u \in V} b_u (q_u + \lambda) \\ &= \sum_{(u,v) \in E} c_{uv} \cdot \min\{q_v - q_u + \gamma_{uv}, 0\} + \sum_{u \in V} b_u q_u + \lambda \sum_{u \in V} b_u \\ &= \sum_{(u,v) \in E} c_{uv} \cdot \min\{q_v - q_u + \gamma_{uv}, 0\} + \sum_{u \in V} b_u q_u \\ & \quad (\sum_{u \in V} b_u = 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

よって, 任意の頂点 v^* に対し, ある最適解 q_u ($u \in V$) が存在して,
 $q_{v^*} = 0$ を満たす

双対定理, 相補性定理

線形計画問題の双対定理, 相補性定理より, 以下の性質が成り立つ

定理[双対定理]:

(P)の最適値 = (D)の最適値 (= (D')の最適値)

相補性条件: 対応する非負変数と制約のどちらかが等号で成り立つ

- 各枝 $(u, v) \in \tilde{E}$ に対し, $x_{uv} = 0$ または $-s_{uv} + q_u - q_v = \gamma_{uv}$
- 各枝 $(u, v) \in E \setminus \tilde{E}$ に対し, $x_{uv} = 0$ または $q_u - q_v = \gamma_{uv}$
- 各枝 $(u, v) \in \tilde{E}$ に対し, $x_{uv} = c_{uv}$ または $s_{uv} = 0$

定理[相補性定理]:

(P) の実行可能解と(D)の実行可能解に対し,
それぞれ(P)と (D)の最適解 ζ は 相補性条件が成立

定理: (P) の実行可能解と(D')の実行可能解に対し,

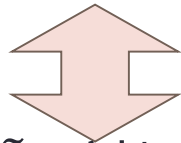
それぞれ(P)と (D')の最適解

ζ は 残余ネットワークの各枝 (u, v) に対し, $q_v - q_u + \gamma_{uv} \geq 0$

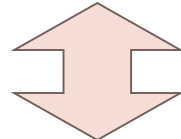
相補性条件の書き換え

相補性条件: 対応する非負変数と制約のどちらかが等号で成り立つ

- 各枝 $(u, v) \in \tilde{E}$ に対し, $x_{uv} = 0$ または $-s_{uv} + q_u - q_v = \gamma_{uv}$
- 各枝 $(u, v) \in E \setminus \tilde{E}$ に対し, $x_{uv} = 0$ または $q_u - q_v = \gamma_{uv}$
- 各枝 $(u, v) \in \tilde{E}$ に対し, $x_{uv} = c_{uv}$ または $s_{uv} = 0$

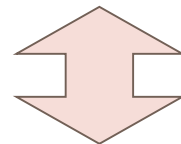


- 各枝 $(u, v) \in \tilde{E}$ に対し, $x_{uv} > 0$ ならば $-s_{uv} + q_u - q_v = \gamma_{uv}$
- 各枝 $(u, v) \in E \setminus \tilde{E}$ に対し, $x_{uv} > 0$ ならば $q_u - q_v = \gamma_{uv}$
- 各枝 $(u, v) \in \tilde{E}$ に対し, $x_{uv} < c_{uv}$ ならば $s_{uv} = 0$



$-s_{uv} = \min\{q_v - q_u + \gamma_{uv}, 0\}$ の下で等価

- 各枝 $(u, v) \in \tilde{E}$ に対し, $x_{uv} > 0$ ならば $q_v - q_u + \gamma_{uv} \leq 0$
- 各枝 $(u, v) \in E \setminus \tilde{E}$ に対し, $x_{uv} > 0$ ならば $q_v - q_u + \gamma_{uv} = 0$
- 各枝 $(u, v) \in \tilde{E}$ に対し, $x_{uv} < c_{uv}$ ならば $q_v - q_u + \gamma_{uv} \geq 0$



- 残余ネットワークの各枝 (u, v) に対し, $q_v - q_u + \gamma_{uv} \geq 0$

双対最適解の不等式表現

最小費用フローが得られると、双対最適解の不等式表現が得られる

定理: (D')の実行可能解は最適解

c は (P)の最適解 (最小費用フロー) に関する残余ネットワーク
の各枝 (u,v) に対し, $q_v - q_u + \gamma_{uv} \geq 0$

双対問題の最適解全体は

差分不等式系 (変数の差に関する不等式系) により表現できる

命題: (D')の2つの最適解 $q'_u, q''_u (u \in V)$ に対し,
 $q_u^* = \max\{q'_u, q''_u\}, q_u^{**} = \min\{q'_u, q''_u\} (u \in V)$ とおくと,
 q_u^*, q_u^{**} もまた(D)の最適解

(証明) 演習問題. 上の定理を使う

残余ネットワークを用いた双対最適解の計算

双対問題の最適解 (のひとつ) は以下の手順で計算可能

- (1) 最小費用フローに関する残余ネットワークをつくる
- (2) 頂点をひとつ選び (t とする), 「各枝の長さ = その枝の費用」
として, 各頂点 v から t への最短路長 $d(v)$ を計算
- (3) $q_v = d(v)$ とおく

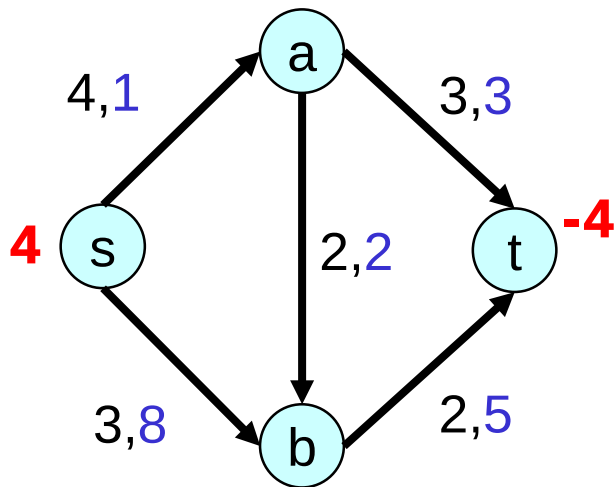
負閉路が存在しない
è 最短路存在

$d(v)$ は最短路長
è $d(v) + \gamma_{uv} \geq d(u)$

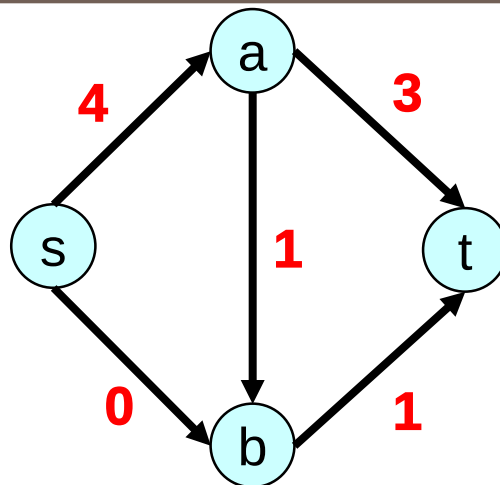
ある頂点 v から t への有向路が
存在しない場合は,
若干の修正が必要

命題: 最短路長を用いて得られる双対最適解 q_u^* は,
 $q_t = 0$ を満たす双対最適解の中で「最大」(極大)
(任意の双対最適解 q_u に対し, $q_u \leq q_u^* (\forall u)$)

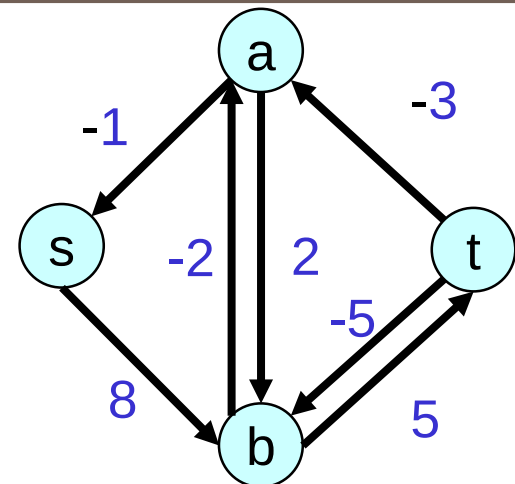
具体例



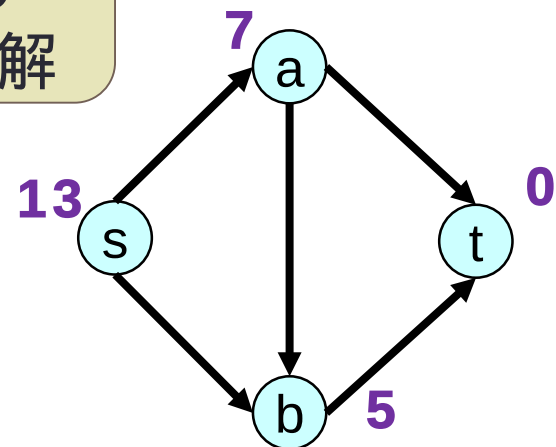
最小費用フロー



残余ネットワーク



最短路長より
得られる
双対最適解

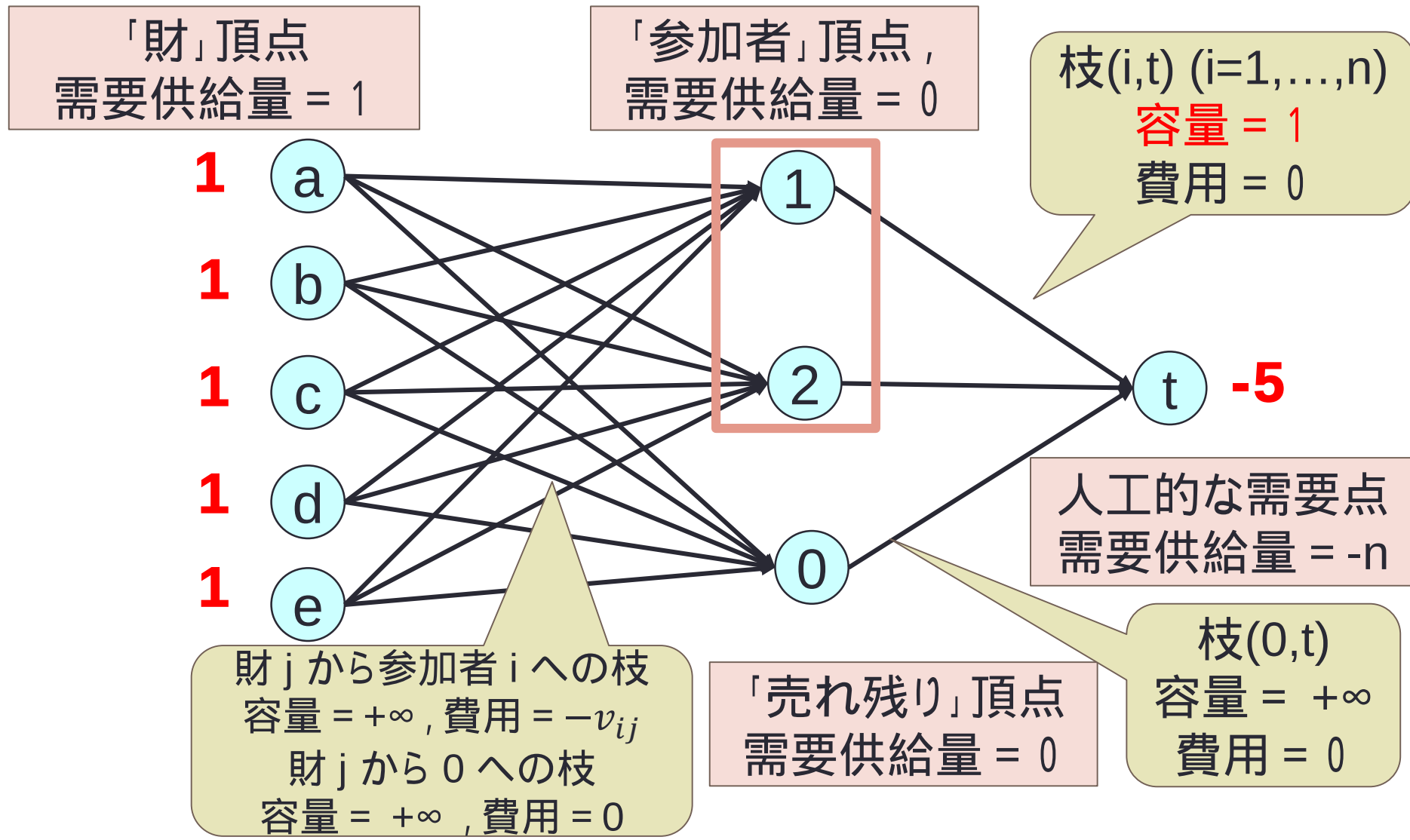


unit-demand valuation の場合の 均衡価格の計算

- unit-demand valuation の場合の均衡の計算
 - 均衡割当: 最小費用流問題に帰着可能
 - 均衡価格: 最小費用流問題の双対に帰着可能

unit-demand valuation の場合の帰着

「各参加者の受け取る財の数 1」と仮定して良い



unit-demand valuation の場合の双対問題

最大化 $\sum_{i=1}^m \min\{0, q_t - q_i\} + \sum_{j=1}^n q_j - nq_t$

参加者*i* から*t* への
枝に対応

条件1 $q_j - q_i \leq -v_{ij}$ (各財*j*, 各参加者*i*)

財*j* から参加者*i* への
枝に対応

条件2 $q_j - q_0 \leq 0$ (各財*j*)

財*j* から0 への枝に
対応

条件3 $q_0 - q_t \leq 0$

0 から*t* への枝に対応

命題: $q_t = 0$ を満たす最適解が存在

以下, $q_t = 0$ と仮定

unit-demand valuation の場合の双対問題: 最適解と均衡価格の関係

命題: $q_t = 0$ を満たす双対最適解に対し,
 $p_j = -q_j$ ($j = 1, \dots, n$) とおくと均衡価格

(証明) 条件1より $q_j - q_i + v_{ij} \leq 0$

財 j_i が参加者 i に割り当てられる

$\Rightarrow$ 枝 (j_i, i) の逆向き枝が残余ネットに存在 $\Rightarrow q_{j_i} - q_i + v_{ij_i} = 0$

$$v_{ij_i} + q_{j_i} = q_i \geq v_{ij} + q_j$$

財 j がどの参加者にも割り当てられない(売れ残る)

$\Rightarrow$ 枝 $(j, 0), (0, t)$ の逆向き枝が残余ネットに存在

$$\Rightarrow q_j - q_0 = 0, q_0 - q_t = 0$$

$$q_j = q_t = 0$$

系: 最短路長を使って得られる双対最適解に対し,
 $p_j = -q_j$ ($j = 1, \dots, n$) とおくと「最小」(極小)の均衡価格

最大重みテンション問題と その最適性条件

双対問題の一般化

最大化: $\sum_{(u,v) \in \tilde{E}} c_{uv} \cdot \min\{q_v - q_u + \gamma_{uv}, 0\} + \sum_{u \in V} b_u q_u$

条件: $q_u - q_v \leq \gamma_{uv} \quad (\forall (u, v) \in E \setminus \tilde{E})$

$$q_t = 0$$

↓ より一般的な, 次の問題を考える
(最大重みテンション問題)

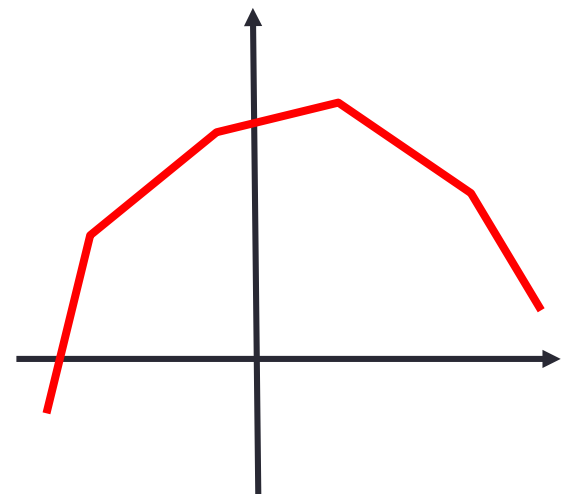
最大化 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij}(q_i - q_j) + \sum_{j=1}^n f_j(q_j)$

条件 $a_{ij} \leq q_i - q_j \leq b_{ij} \quad (1 \leq \forall i < \forall j \leq n)$

$a_j \leq q_j \leq b_j \quad (1 \leq \forall j \leq n)$

各 q_j は整数

ここで, 各関数 f_{ij}, f_j は凹関数と仮定



最大重みテンション問題の最適解

最大重みテンション問題の最適解の不等式表現

命題: 最適解集合 S^* は, ある $\tilde{a}_{ij}, \tilde{a}_j \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \tilde{b}_{ij}, \tilde{b}_j \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ を用いて, 以下のように表現可能

$$S^* = \{p \in \mathbb{Z}^n \mid \tilde{a}_{ij} \leq q_i - q_j \leq \tilde{b}_{ij} \ (1 \leq \forall i < \forall j \leq n) \\ \tilde{a}_j \leq q_j \leq \tilde{b}_j \ (1 \leq \forall j \leq n)\}$$

命題: 2つの最適解 q'_i, q''_i ($i = 1, 2, \dots, n$) に対し,
 $q_i^* = \max\{q'_i, q''_i\}, q_i^{**} = \min\{q'_i, q''_i\}$ とおくと,
 q_i^*, q_i^{**} もまた最適解



最適解集合が有界ならば, 極小最適解, 極大最適解は一意に定まる

最大重みテンション問題の最適性条件

記号の定義

$q = (q_1, \dots, q_n)$: 最大重みテンション問題の解を表すベクトル

$f(q) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij}(q_i - q_j) + \sum_{j=1}^n f_j(q_j)$ --- 目的関数

$X \subseteq \{1, \dots, n\}$ に対し, ベクトル $e_X \in \{0, 1\}^n$ を以下のように定義:

$$(e_X)_i = \begin{cases} 1 & i \in X \\ 0 & i \notin X \end{cases}$$

定理: ベクトル $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ は最適解

⇔ 任意の $X \subseteq \{1, \dots, n\}$ に対し,

$q^* + e_X$ が実行可能解 ⇔ $f(q^* + e_X) \leq f(q^*)$

$q^* - e_X$ が実行可能解 ⇔ $f(q^* - e_X) \leq f(q^*)$

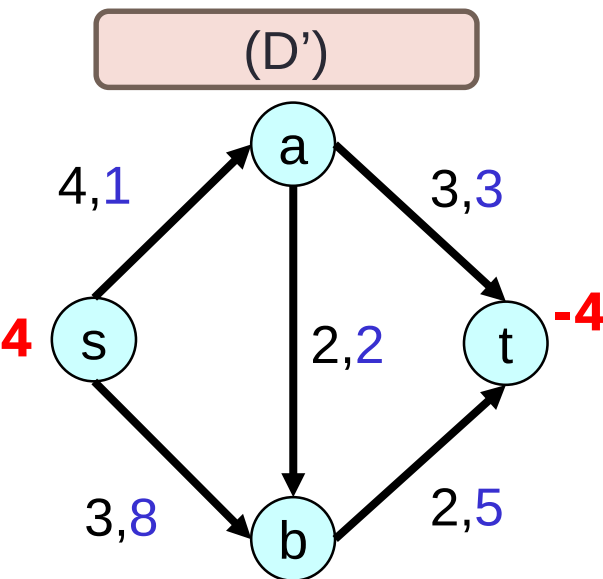
(対偶) ベクトル $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ は最適解でない

⇔ ある $X \subseteq \{1, \dots, n\}$ に対し,

$q^* + e_X$ が実行可能解かつ $f(q^* + e_X) > f(q^*)$, または

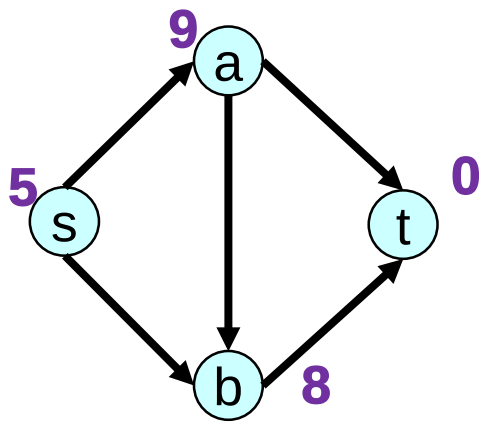
$q^* - e_X$ が実行可能解かつ $f(q^* - e_X) > f(q^*)$

具体例



$$\begin{aligned}
 &\text{最大化: } 4 \min\{q_a - q_s + 1, 0\} \\
 &\quad + 3 \min\{q_t - q_a + 3, 0\} + 2 \min\{q_b - q_a + 2, 0\} \\
 &\quad + 3 \min\{q_b - q_s + 8, 0\} + 2 \min\{q_t - q_b + 5, 0\} \\
 &\quad + 4q_s + (-4)q_t \\
 &\text{条件: } q_t = 0
 \end{aligned}$$

最適でない解



目的関数値

$$\begin{aligned}
 &= 4 \min\{9 - 5 + 1, 0\} \\
 &\quad + 3 \min\{0 - 9 + 3, 0\} \\
 &\quad + 2 \min\{8 - 9 + 2, 0\} \\
 &\quad + 3 \min\{8 - 5 + 8, 0\} \\
 &\quad + 2 \min\{0 - 8 + 5, 0\} \\
 &\quad + 4 \cdot 5 + (-4) \cdot 0 \\
 &= -4
 \end{aligned}$$

q_a, q_b を 1
増加



目的関数値

$$\begin{aligned}
 &= 4 \min\{8 - 5 + 1, 0\} \\
 &\quad + 3 \min\{0 - 8 + 3, 0\} \\
 &\quad + 2 \min\{7 - 8 + 2, 0\} \\
 &\quad + 3 \min\{7 - 5 + 8, 0\} \\
 &\quad + 2 \min\{0 - 7 + 5, 0\} \\
 &\quad + 4 \cdot 5 + (-4) \cdot 0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

最適性条件の判定方法

定理: ベクトル $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ は最適解

ζ は 任意の $X \subseteq \{1, \dots, n\}$ に対し,

$q^* + e_X$ が実行可能解 $\Rightarrow f(q^* + e_X) \leq f(q^*)$

$q^* - e_X$ が実行可能解 $\Rightarrow f(q^* - e_X) \leq f(q^*)$

$f(q^* + e_X)$ を最大にする X , $f(q^* - e_Y)$ を最大にする Y を計算できれば判定可能

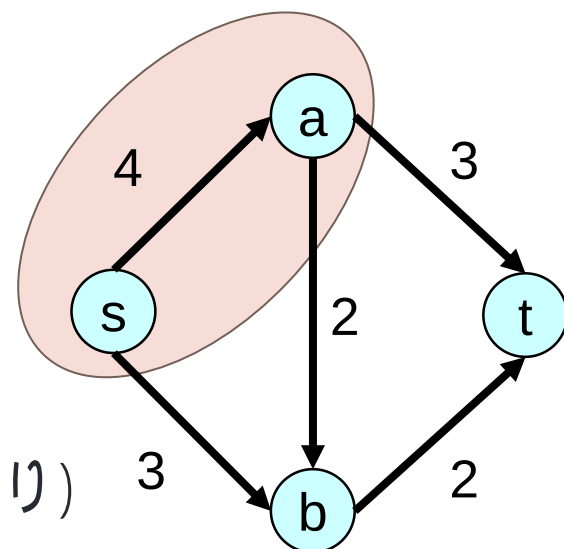
- 単純なやり方: すべて X, Y について試す
 - X, Y の種類は 2^n 個 $\Rightarrow$ 指数時間が必要なので遅い
- 賢いやり方: グラフの最小s-tカット問題に帰着
 - 効率的に(多項式時間で)計算可能

最小s-tカット問題

- **入力**: 有向グラフ $G=(V, E)$, ただし $s, t \in V$
各枝 (u,v) の容量 $c(u,v)$
- **出力**: s-t カット X の中で, カット容量 $c(X, V-X)$ が最大のものの
(最小s-tカット)

- **定義**: 有向グラフの s-t カット $X \subset V$
 $s \in X, t \notin X$
s-t カット X の **カット容量** $c(X, V-X)$
= X の頂点から $V-X$ の頂点に向かう
枝の容量の和

頂点集合 $X=\{s,a\}$ は
s-t カット
カット容量 = $3+2+3=8$



- 各枝の容量が非負ならば, 最小s-tカットは
効率的に計算できる (最大流最小カット定理より)