

復習：主問題と双対問題



主問題(primal problem)

最小化: $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$
条件: $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$
 $\vdots$
 $a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$
 $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

双対問題(dual problem)

最大化: $b_1y_1 + \cdots + b_my_m$
条件: $a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1$
 $\vdots$
 $a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_n$
 $y_1, y_2, \dots, y_m \geq 0$

主問題の i 番目の不等式

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$



双対問題の i 番目の変数

$$y_i \geq 0$$

主問題の j 番目の変数

$$x_j \geq 0$$



双対問題の j 番目の不等式

$$a_{1j}y_1 + \cdots + a_{mj}y_m \leq c_j$$

実行可能, 実行不可能



定義: 不等式標準形のLPに対し

- **実行可能(feasible)** 許容解(実行可能解)が存在する
- **実行不可能(infeasible)** 許容解(実行可能解)が存在しない

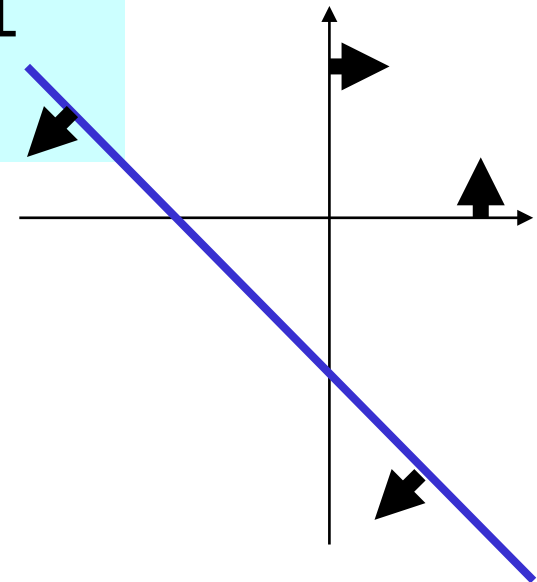
$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x + 2y \\ \text{条件} & -x - y \leq -3 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

実行可能

$(1, 1)$ は許容解

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x + 2y \\ \text{条件} & -x - y \leq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

実行不可能



有界, 非有界



定義: 実行可能なLPは (最小化の場合)

┆ 有界(bounded)

任意の許容解の目的関数値がある定数より大きい

┆ 非有界(unbounded) 目的関数値をいくらでも小さく出来る

最小化 $x + 2y$

条件 $-x - y \leq -3$

$x, y \geq 0$

有界

目的関数値 0

最小化 $-x - y$

条件 $x + y \leq 0$

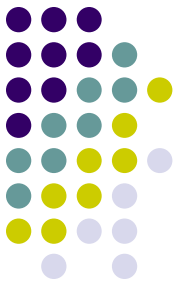
$x, y \geq 0$

非有界

任意の $\alpha > 0$ に対し (α, α) は許容解

目的関数値 $= -2\alpha$

LPの基本定理



定理 3.1 (基本定理, fundamental theorem)

任意のLPに対し、

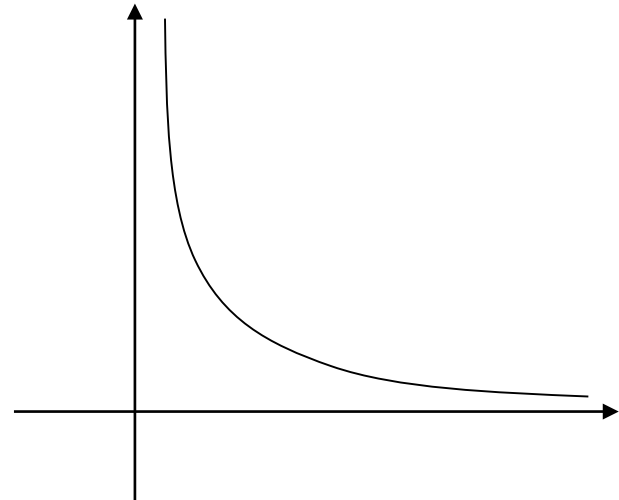
実行可能かつ有界 最適解が存在

非線形計画の場合は成り立つとは限らない！

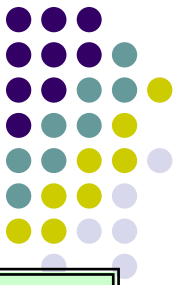
最小化 y
条件 $xy = 1$
 $x, y \geq 0$

最適値 = 0

でも $y = 0$ なる許容解はない



弱双対定理



定理 3 . 2 (弱双対定理, weak duality theorem):

x : 主問題の許容解, y : 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

主問題の目的関数値

双対問題の目的関数値

弱双対定理の証明



シグマの順番
を換える

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} y_i x_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_i - \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

最小化 $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$

条件

$$\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & b_m \end{array}$$

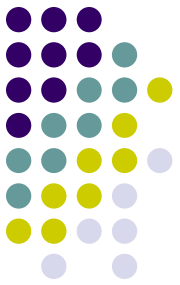
$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

最大化 $b_1 y_1 + \cdots + b_m y_m$

条件

$$\begin{array}{ll} a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m & c_1 \\ a_{12}y_1 + \cdots + a_{m2}y_m & c_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_n & c_n \end{array}$$

$y_1 \geq 0, \dots, y_m \geq 0$



弱双対定理の系

系 3 . 1

主問題が**非有界**

双対問題は**実行不可能**

双対問題が**非有界**

主問題は**実行不可能**

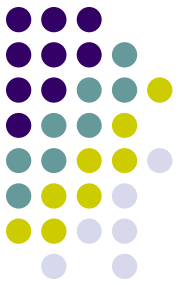
証明: 対偶（双対: 実行可能 主: 有界）を示す
双対問題が実行可能と仮定

y : 双対問題の許容解、 $\alpha = \sum b_i y_i$

弱双対定理より、主問題の任意の許容解 x に対し

$\sum c_j x_j \leq \alpha$ 主問題は有界

弱双対定理の系



系 3 . 2

x : 主問題の許容解, y : 双対問題の許容解,

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i \text{ を満たす}$$

x : 主問題の最適解、 y : 双対問題の最適解

証明→レポート問題

弱双対定理 (定理 3 . 2) を使って証明すること

弱双対定理の系



例 3 . 3

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \quad -4$

$-2x_1 \quad -4x_3 \quad -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \quad -1$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件 $-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \quad -2$

$-2y_1 \quad -3y_3 \quad -1$

$y_1 - 4y_2 + y_3 \quad -1$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

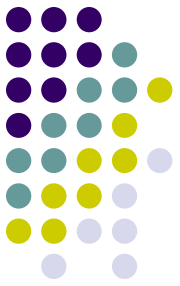
$x = (2, 0, 0)$: 許容解

$y = (3/5, 2/5, 0)$: 許容解

$$-2 \times 2 - 0 - 0 = -4 = -4 \times (3/5) - 4 \times (2/5) - 0$$

系 3 . 2 より、 x, y はそれぞれ最適解

双対定理



定理 3.3 (双対定理, duality theorem) :

主問題または双対問題が最適解をもつ

他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

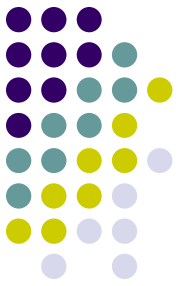
証明 → 後日

主問題と双対問題の答えの組合せ



			双対問題		
			実行可能		実行不可能
			最適解	非有界	
主問題	実行可能	最適解	○ (双対定理)	× (系 3 . 1)	× (双対定理)
		非有界	× (系 3 . 1)	× (系 3 . 1)	○ (系 3 . 1)
	実行不可能		× (双対定理)	○ (系 3 . 1)	○

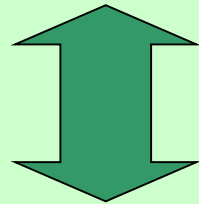
相補性定理 (complementarity slackness theorem)



定理 3 . 4 :

x : 主問題の許容解, y : 双対問題の許容解

x および y は最適解



相補性条件

(complementarity
slackness condition)

各 $j = 1, \dots, n$ について

$\sum_i a_{ij} y_i \leq c_j$ と $x_j \geq 0$ のどちらかは等号成立

各 $i = 1, \dots, m$ について

$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i$ と $y_i \geq 0$ のどちらかは等号成立

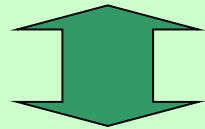
相補性定理の証明



x: 主問題の許容解

y: 双対問題の許容解

x、**y** は最適解



$$\sum_i a_{ij} y_i = c_j \quad \text{または} \quad x_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_j a_{ij} x_j = b_i \quad \text{または} \quad y_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

証明: 弱双対定理の証明より

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i x_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_i \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

x、**y** が最適

最初の項 = 最後の項

$$(\sum_i a_{ij} y_i) x_j = c_j x_j, \quad (\sum_i a_{ij} x_j) y_i = b_i y_i$$

相補性