

経済学特講II 第6回

競争均衡の計算のための 繰り返しオークションの数理 ---離散凸解析の視点からの理解---

塩浦昭義

今日の内容

- 最小費用流問題の双対問題
- 均衡価格との関係

最小費用流問題の定式化

目的: フローの総費用を最小に

$$\text{最小化: } \sum_{(u,v) \in E} \gamma_{uv} x_{uv}$$

条件1 (容量条件): $0 \leq x_{uv} \leq c_{uv} \quad (\forall (u,v) \in E)$ 各枝を流れるフローの量 枝の容量

条件2 (流量保存条件):

頂点から流れ出すフローの量 - 流れ込むフローの量 = 需要供給量

$$\sum_{v:(u,v) \in E} x_{uv} - \sum_{v':(v',u) \in E} x_{v'u} = b_u \quad (\forall u \in V)$$

(P) 最小化: $\sum_{(u,v) \in E} \gamma_{uv} x_{uv}$ 双対変数 s_{uv}

条件: $-x_{uv} \geq -c_{uv} \quad (\forall (u,v) \in E)$ p_u

$$\sum_{v:(u,v) \in E} x_{uv} - \sum_{v':(v',u) \in E} x_{v'u} = b_u \quad (\forall u \in V)$$
$$x_{uv} \geq 0 \quad (\forall (u,v) \in E)$$

これは線形計画問題 $\Leftrightarrow$ 双対問題を考える

最小費用流問題の双対

(D)

最大化: $-\sum_{(u,v) \in E} c_{uv} s_{uv} + \sum_{u \in V} b_u q_u$

条件: $-s_{uv} + q_u - q_v \leq \gamma_{uv} \quad (\forall (u, v) \in E)$

$s_{uv} \geq 0 \quad (\forall (u, v) \in E)$

$c_{uv} > 0$ なので, s_{uv} は小さいほどよい

2つの条件より, $-s_{uv} \geq \min\{q_v - q_u + \gamma_{uv}, 0\}$

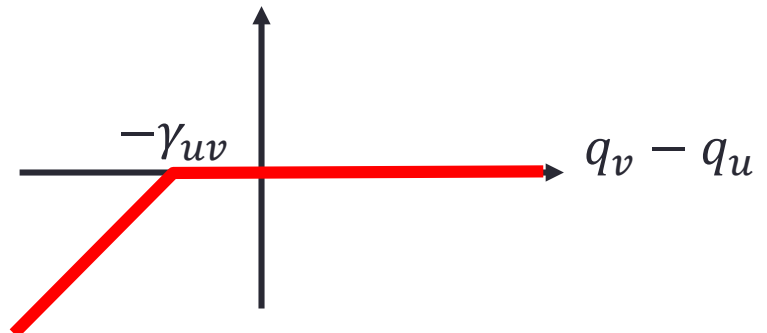
最適解では, この不等式は等号で成立

è $-s_{uv} = \min\{q_v - q_u + \gamma_{uv}, 0\}$ を代入, s_{uv} を消去すると...

(D')

最大化: $\sum_{(u,v) \in E} c_{uv} \cdot \min\{q_v - q_u + \gamma_{uv}, 0\} + \sum_{u \in V} b_u q_u$

条件: なし



双対問題の解の性質

各変数を一定量増減しても, 目的関数値は不変

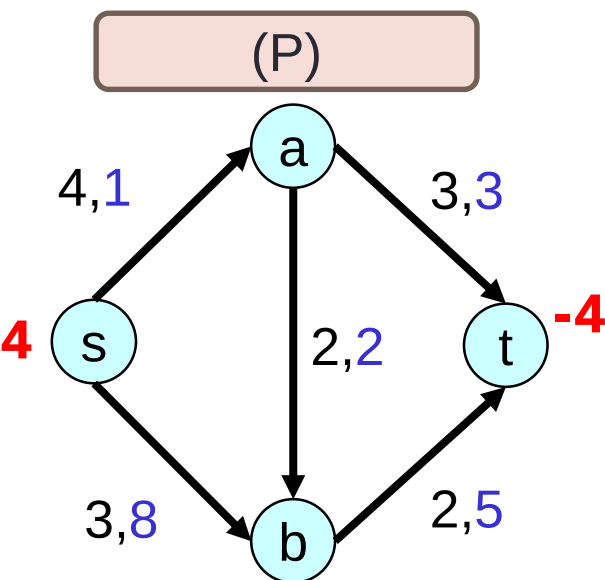
(D') 最大化: $\sum_{(u,v) \in E} c_{uv} \cdot \min\{q_v - q_u + \gamma_{uv}, 0\} + \sum_{u \in V} b_u q_u$
 条件: なし

各 q_u を $q_u + \lambda$ に置き換えてみる (λ は実数)

$$\begin{aligned} & \sum_{(u,v) \in E} c_{uv} \cdot \min\{(q_v + \lambda) - (q_u + \lambda) + \gamma_{uv}, 0\} + \sum_{u \in V} b_u (q_u + \lambda) \\ &= \sum_{(u,v) \in E} c_{uv} \cdot \min\{q_v - q_u + \gamma_{uv}, 0\} + \sum_{u \in V} b_u q_u + \lambda \sum_{u \in V} b_u \\ &= \sum_{(u,v) \in E} c_{uv} \cdot \min\{q_v - q_u + \gamma_{uv}, 0\} + \sum_{u \in V} b_u q_u \\ & \quad (\sum_{u \in V} b_u = 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

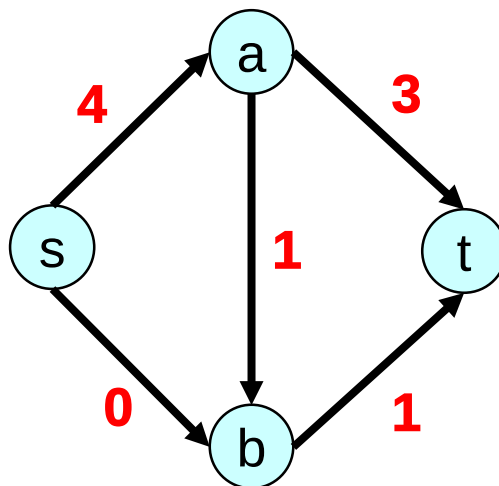
よって, 任意の頂点 v^* に対し, ある最適解 q_u ($u \in V$) が存在して,
 $q_{v^*} = 0$ を満たす

具体例



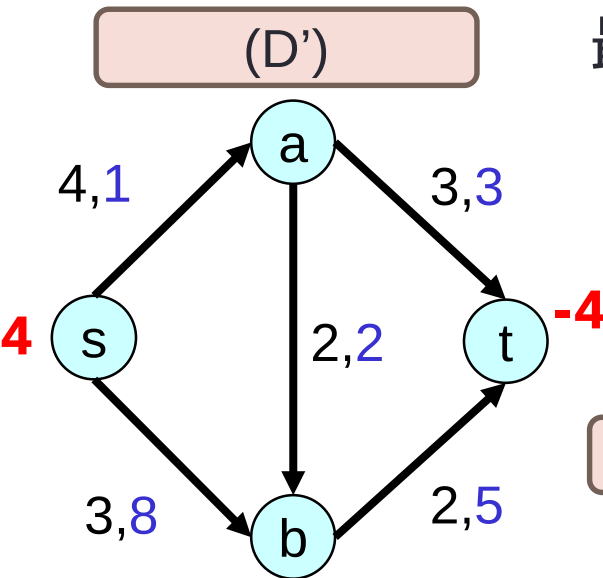
最小化: $x_{sa} + 3x_{at} + 2x_{ab} + 8x_{sb} + 5x_{bt}$
 条件: $0 \leq x_{sa} \leq 4, 0 \leq x_{at} \leq 3,$
 $0 \leq x_{ab} \leq 2, 0 \leq x_{sb} \leq 3, 0 \leq x_{bt} \leq 2$
 $x_{sa} + x_{sb} = 4, (x_{at} + x_{ab}) - x_{sa} = 0,$
 $x_{bt} - (x_{ab} + x_{sb}) = 0, -(x_{at} + x_{bt}) = -4$

最小費用フロー

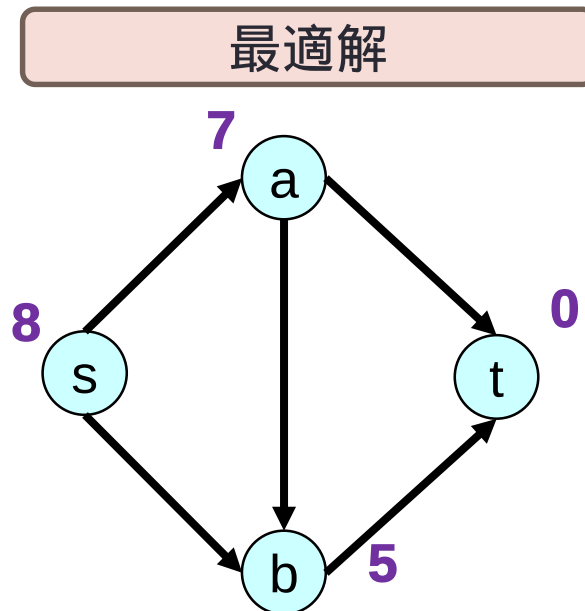


目的関数値 = 20

具体例



最大化: $4 \min\{q_a - q_s + 1, 0\}$
 $+ 3 \min\{q_t - q_a + 3, 0\} + 2 \min\{q_b - q_a + 2, 0\}$
 $+ 3 \min\{q_b - q_s + 8, 0\} + 2 \min\{q_t - q_b + 5, 0\}$
 $+ 4q_s + (-4)q_t$



目的関数値

$$\begin{aligned}
 &= 4 \min\{7 - 8 + 1, 0\} \\
 &+ 3 \min\{0 - 7 + 3, 0\} \\
 &+ 2 \min\{5 - 7 + 2, 0\} \\
 &+ 3 \min\{5 - 8 + 8, 0\} \\
 &+ 2 \min\{0 - 5 + 5, 0\} \\
 &+ 4 \cdot 8 + (-4) \cdot 0 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

双対定理, 相補性定理

線形計画問題の双対定理, 相補性定理より, 以下の性質が成り立つ

定理[双対定理]:

(P)の最適値 = (D)の最適値 (= (D')の最適値)

相補性条件: 対応する非負変数と制約のどちらかが等号で成り立つ

- 各枝(u,v)に対し, $x_{uv} = 0$ または $-s_{uv} + q_u - q_v = \gamma_{uv}$
- 各枝(u,v)に対し, $x_{uv} = c_{uv}$ または $s_{uv} = 0$

定理[相補性定理]:

(P) の実行可能解と(D)の実行可能解に対し,
それぞれ(P)と (D)の最適解 ζ è 相補性条件が成立

定理: (P) の実行可能解と(D')の実行可能解に対し,

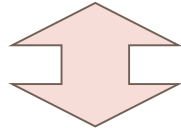
それぞれ(P)と (D')の最適解

ζ è 残余ネットワークの各枝(u,v)に対し, $q_v - q_u + \gamma_{uv} \geq 0$

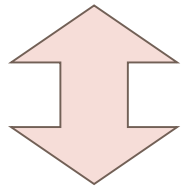
相補性条件の書き換え

相補性条件: 対応する非負変数と制約のどちらかが等号で成り立つ

- 各枝(u,v)に対し, $x_{uv} = 0$ または $-s_{uv} + q_u - q_v = \gamma_{uv}$
- 各枝(u,v)に対し, $x_{uv} = c_{uv}$ または $s_{uv} = 0$

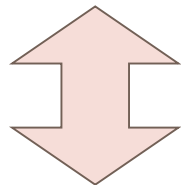


- 各枝(u,v)に対し, $x_{uv} > 0$ ならば $-s_{uv} + q_u - q_v = \gamma_{uv}$
- 各枝(u,v)に対し, $x_{uv} < c_{uv}$ ならば $s_{uv} = 0$



$-s_{uv} = \min\{q_v - q_u + \gamma_{uv}, 0\}$ の下で等価

- 各枝(u,v)に対し, $x_{uv} > 0$ ならば $q_v - q_u + \gamma_{uv} \leq 0$
- 各枝(u,v)に対し, $x_{uv} < c_{uv}$ ならば $q_v - q_u + \gamma_{uv} \geq 0$



- 残余ネットワークの各枝(u,v)に対し, $q_v - q_u + \gamma_{uv} \geq 0$

双対最適解の不等式表現

最小費用フローが得られると、双対最適解の不等式表現が得られる

定理: (D')の実行可能解は最適解

c は (P)の最適解 (最小費用フロー) に関する残余ネットワーク
の各枝 (u,v) に対し, $q_v - q_u + \gamma_{uv} \geq 0$

双対問題の最適解全体は

差分不等式系 (変数の差に関する不等式系) により表現できる

命題: (D')の2つの最適解 $q'_u, q''_u (u \in V)$ に対し,
 $q_u^* = \max\{q'_u, q''_u\}, q_u^{**} = \min\{q'_u, q''_u\} (u \in V)$ とおくと,
 q_u^*, q_u^{**} もまた(D)の最適解

(証明) 演習問題. 上の定理を使う

最適解の計算

定理: (D')の実行可能解は最適解

$\zeta \in (P)$ の最適解(最小費用フロー)に関する残余ネットワークの各枝 (u,v) に対し, $q_v - q_u + \gamma_{uv} \geq 0$

双対問題の最適解(のひとつ)は以下の手順で計算可能

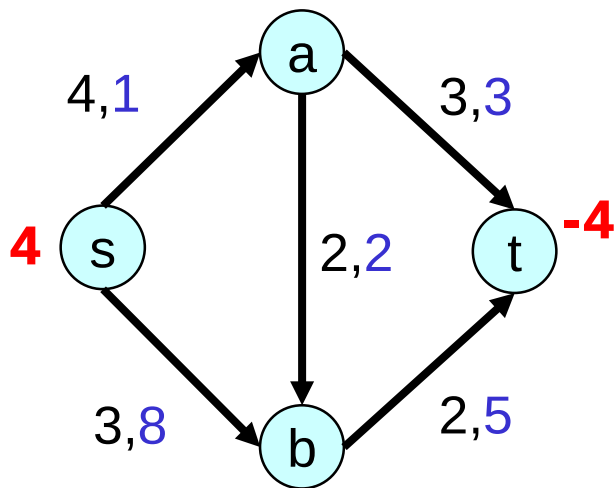
- (1) 最小費用フローに関する残余ネットワークをつくる
- (2) 頂点をひとつ選び(t とする), 「各枝の長さ = その枝の費用」
として, 各頂点 v から t への最短路長 $d(v)$ を計算
- (3) $q_v = d(v)$ とおく

負閉路が存在しない
è 最短路存在

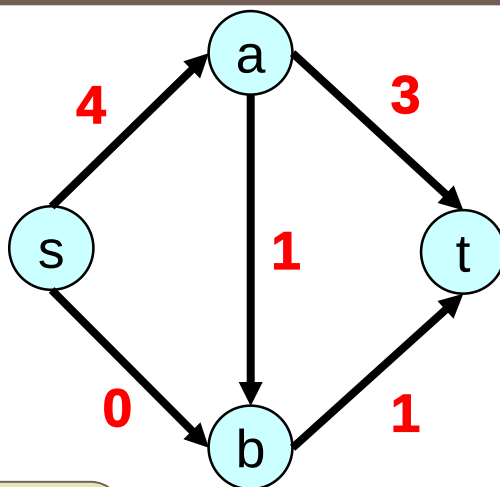
$d(v)$ は最短路長
è $d(v) + \gamma_{uv} \geq d(u)$

ある頂点 v から t への有向路が存在しない場合は,
若干の修正が必要

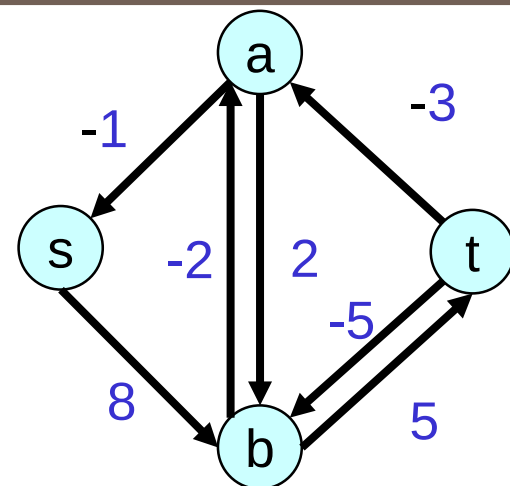
具体例



最小費用フロー

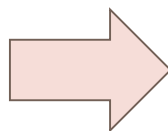


残余ネットワーク



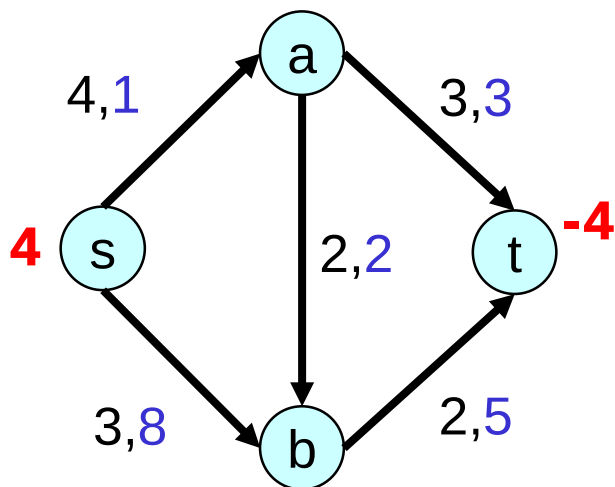
最小費用フローより得られる,
双対最適解の不等式表現

$$\begin{aligned} x_{sa} > 0 &\Rightarrow q_a - q_s + 1 \leq 0 \\ x_{at} > 0 &\Rightarrow q_t - q_a + 3 \leq 0 \\ 0 < x_{ab} < 2 &\Rightarrow q_b - q_a + 2 = 0 \\ x_{sb} < 3 &\Rightarrow q_b - q_s + 8 \geq 0 \\ 0 < x_{bt} < 2 &\Rightarrow q_t - q_b + 5 = 0 \end{aligned}$$

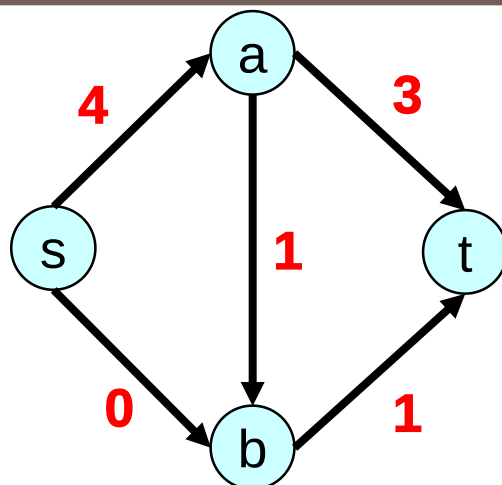


$$\begin{aligned} x_t &= 0 \text{ と固定する} \\ &\Rightarrow q_b = 5 \text{ (第5式より)} \\ &\Rightarrow q_a = 7 \text{ (第3式より)} \\ &\Rightarrow 8 \leq q_s \leq 13 \text{ (第1,4式より)} \end{aligned}$$

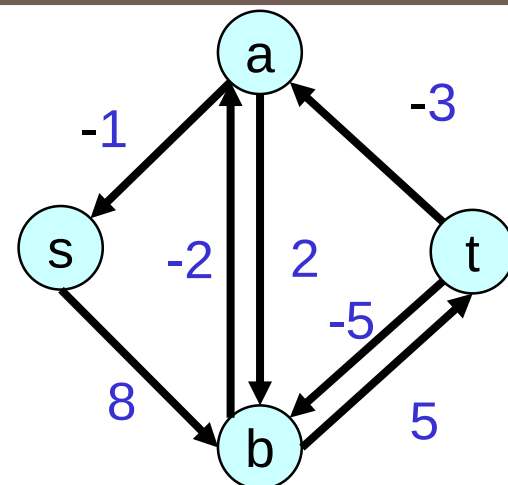
具体例



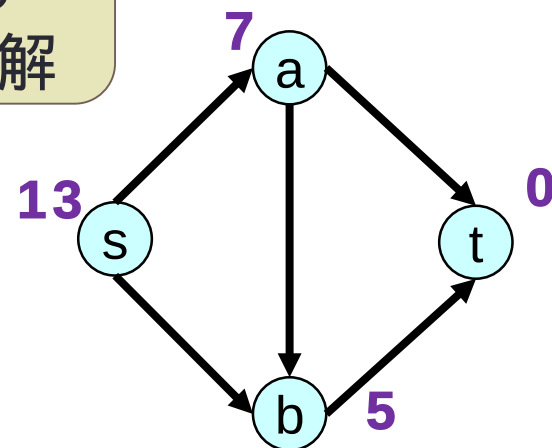
最小費用フロー



残余ネットワーク



最短路長より
得られる
双対最適解

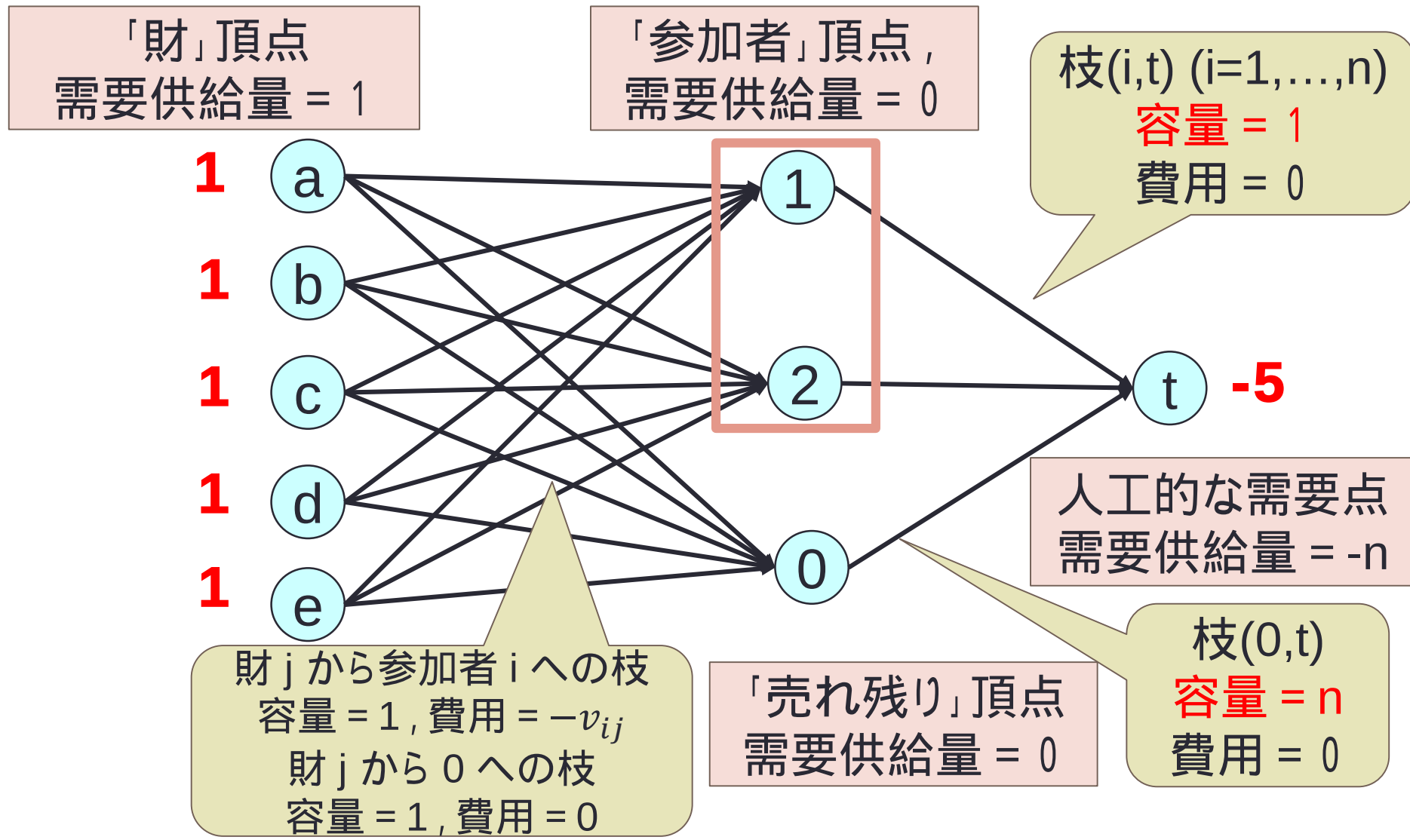


unit-demand valuation の場合の 均衡価格の計算

- unit-demand valuation の場合の均衡の計算
 - 均衡割当: 最小費用流問題に帰着可能
 - 均衡価格: 最小費用流問題の双対に帰着可能

unit-demand valuation の場合の帰着

「各参加者の受け取る財の数 1」と仮定して良い



unit-demand valuation の場合の双対問題

$$\text{最大化 } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \min\{0, q_i - q_j - v_{ij}\}$$

財j から参加者i への枝に対応

$$+ \sum_{i=1}^m \min\{0, q_t - q_i\}$$

参加者i からt への枝に対応

$$+ \sum_{j=1}^n \min\{0, q_0 - q_j\}$$

財j から0 への枝に対応

$$+ \min\{0, q_t - q_0\}$$

$$+ \sum_{j=1}^n q_j - nq_t$$

0 からt への枝に対応

unit-demand valuation の場合の双対問題: 最適解の条件

財j が参加者i に割り当てられる

$$\Leftrightarrow q_j - q_i + v_{ij} \geq 0, q_{i'} - q_j - v_{i'j} \geq 0 \ (\forall i' \neq i), q_0 - q_j \geq 0$$

財j がどの参加者にも割り当てられない

$$\Leftrightarrow q_i - q_j - v_{ij} \geq 0 \ (\forall i), q_j - q_0 \geq 0$$

参加者i が財を受け取る $\Leftrightarrow q_i - q_t \geq 0$

参加者i が財を受け取らない

$$\Leftrightarrow q_t - q_i \geq 0$$

売れ残りの財がある $\Leftrightarrow q_t - q_0 = 0$, ない $\Leftrightarrow q_t - q_0 \geq 0$

参加者i に財j*が
割り当てられたとき,
 $v_{ij^*} + q_{j^*} \geq q_i \geq v_{ij} + q_j$

unit-demand valuation の場合の双対問題:

命題:

$q_t = 0$ を満たす最適解が存在 (双対問題の性質)
 さらに, どの参加者にも割り当てられない財 j に対し,
 $q_j > 0$ ならば $q_j = 0$ と置き換えても最適解

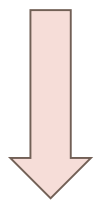
$q_t = 0, q_j \geq 0 (\forall j = 1, \dots, n)$ を満たす双対最適解は必ず存在,
 $p_j = -q_j$ とすると均衡価格
 è 双対問題から変数 q_t を消去, 条件 $q_j \geq 0 (\forall j = 1, \dots, n)$ を追加
 した問題を解けば均衡価格が得られる

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \min\{0, q_i - q_j - v_{ij}\} + \sum_{i=1}^m \min\{0, q_t - q_i\} \\ & + \sum_{j=1}^n \min\{0, q_0 - q_j\} + \min\{0, q_t - q_0\} + \sum_{j=1}^n q_j - nq_t \end{aligned}$$

$$\text{条件} \quad q_j \geq 0 (\forall j = 1, \dots, n)$$

双対問題の一般化

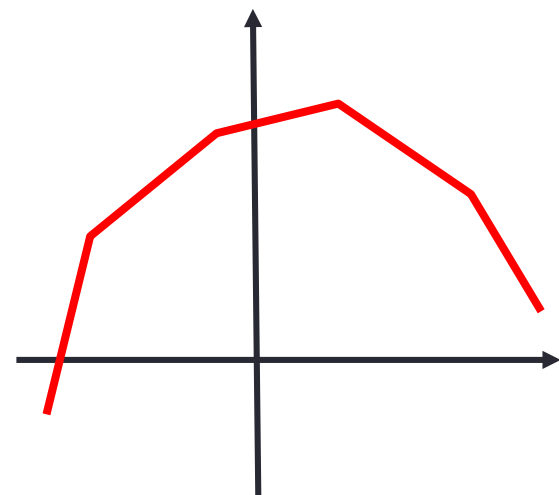
$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \min\{0, q_i - q_j - v_{ij}\} + \sum_{i=1}^m \min\{0, -q_i\} \\ & + \sum_{j=1}^n \min\{0, q_0 - q_j\} + \min\{0, -q_0\} + \sum_{j=1}^n q_j \\ \text{条件} \quad & q_j \geq 0 \quad (\forall j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$



より一般的な, 次の問題を考える
(最大重みテンション問題)

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij}(q_i - q_j) + \sum_{j=1}^n f_j(q_j) \\ \text{条件} \quad & a_{ij} \leq q_i - q_j \leq b_{ij} \quad (1 \leq \forall i < \forall j \leq n) \\ & a_j \leq q_j \leq b_j \quad (1 \leq \forall j \leq n) \\ & \text{各 } q_j \text{ は整数} \end{aligned}$$

ここで, 各関数 f_{ij}, f_j は凹関数と仮定



最大重みテンション問題の最適解

最大重みテンション問題の最適解の不等式表現

命題: 最適解集合 S^* は, ある $\tilde{a}_{ij}, \tilde{a}_j \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \tilde{b}_{ij}, \tilde{b}_j \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ を用いて, 以下のように表現可能

$$S^* = \{p \in \mathbb{Z}^n \mid \tilde{a}_{ij} \leq q_i - q_j \leq \tilde{b}_{ij} \ (1 \leq \forall i < \forall j \leq n) \\ \tilde{a}_j \leq q_j \leq \tilde{b}_j \ (1 \leq \forall j \leq n)\}$$

命題: 2つの最適解 $q'_u, q''_u \ (u \in V)$ に対し,
 $q_u^* = \max\{q'_u, q''_u\}, q_u^{**} = \min\{q'_u, q''_u\} \ (u \in V)$ とおくと,
 q_u^*, q_u^{**} もまた最適解



最適解集合が有界ならば, 極小最適解, 極大最適解は一意に定まる

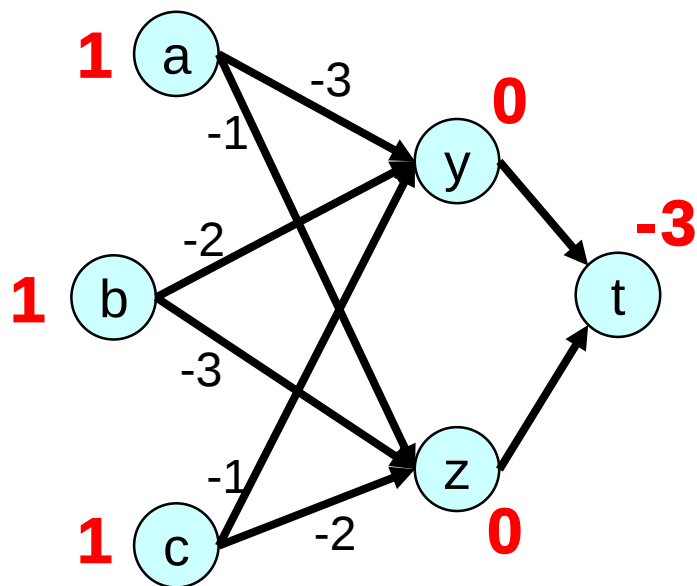
レポート問題



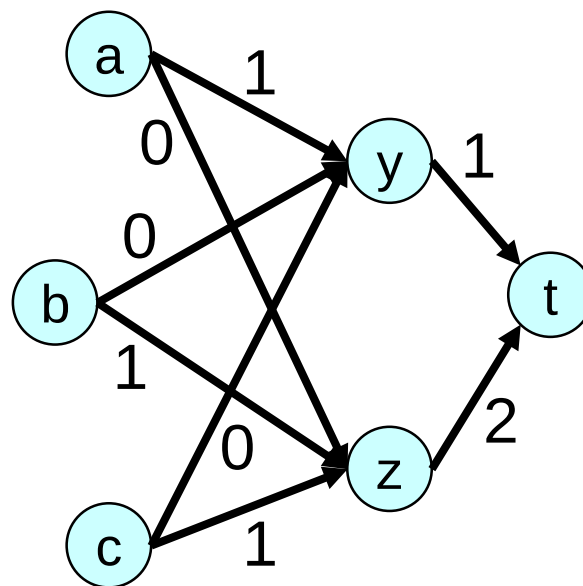
問1: 次の最小費用フロー問題について考える.

(1) 双対問題を定式化せよ ((D')を具体的に書け)

(2) 最小費用フローを使って, 双対問題の最適解全体に対する不等式表現を求めよ.
ただし, 頂点 t に対応する変数 q_t の値は 0 に固定する.



最小費用フロー



a, b, c から出る枝の容量 $= 1$. それ以外の枝の容量 $= +\infty$

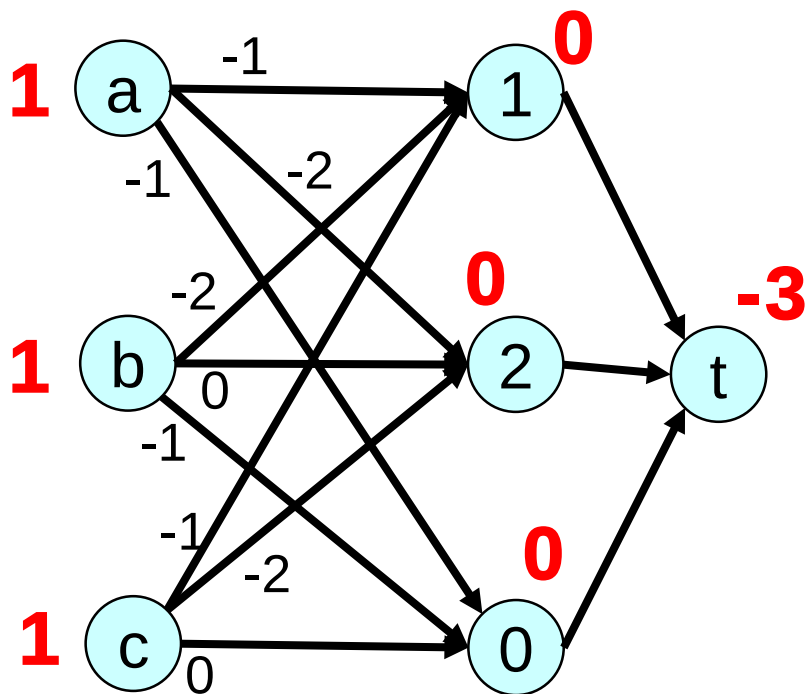
t に入る枝の費用 $= 0$, それ以外は各枝の数値を参照

レポート問題

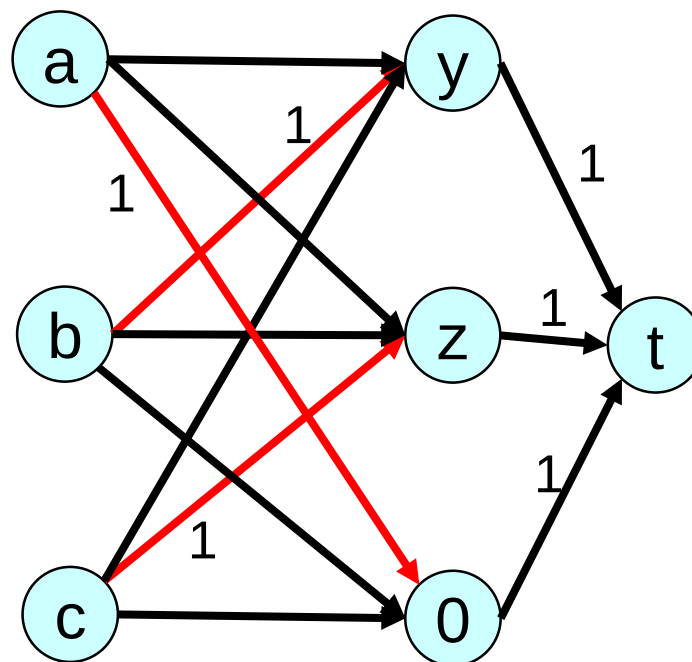


問2: 次の最小費用フロー問題について考える.

最小費用フローを使って, 双対問題の最適解全体に対する不等式表現を求めよ.
ただし, 頂点 t に対応する変数 q_t の値は 0 に固定する.



最小費用フロー



すべての枝の容量 = 1

t に入る枝の費用 = 0, それ以外は各枝の数値を参照

レポート問題

問3: $\alpha' - \beta' \leq \gamma, \alpha'' - \beta'' \leq \gamma$ ならば

$$\max\{\alpha', \alpha''\} - \max\{\beta', \beta''\} \leq \gamma, \min\{\alpha', \alpha''\} - \min\{\beta', \beta''\} \leq \gamma$$

が成立することを証明せよ.

問4: 不等式系

$$a_{ij} \leq q_i - q_j \leq b_{ij} \quad (1 \leq \forall i < \forall j \leq n), a_j \leq q_j \leq b_j \quad (1 \leq \forall j \leq n)$$

の2つの解 q'_j, q''_j に対し, $q_j^* = \max\{q'_j, q''_j\}, q_j^{**} = \min\{q'_j, q''_j\}$ とおくと,
 q_j^*, q_j^{**} もまた不等式系の解となることを証明せよ.