

経済学特講II 第4回

競争均衡の計算のための 繰り返しオークションの数理 ---離散凸解析の視点からの理解---

塩浦昭義

今日の内容

- 競争均衡の存在の証明, および計算方法

競争均衡

- 財の価格ベクトル $p \in \mathbb{R}_+^n$
- 定義: 需要集合 $D_i(p) \subseteq 2^N$
 - $D_i(p) = \arg \max \{f_i(X) - \sum_{j \in X} p_j \mid X \subseteq N\}$
- 定義: 価格ベクトル p^* と N の分割 $(X_1, \dots, X_m)$ の組は
競争均衡 (ワルラス均衡) p^* は均衡価格
 $\zeta \ni X_i \in D_i(p^*) \ (i = 1, \dots, m)$

この授業では, 価格ベクトルは非負と仮定

競争均衡の性質

命題:

価格ベクトル p^* と N の分割 $(X_1, \dots, X_m)$ の組は競争均衡と仮定

- (i) $\sum_{i=1}^m f_i(X_i) = \max \{ \sum_{i=1}^m f_i(Y_i) \mid (Y_1, \dots, Y_m) \text{ は } N \text{ の分割} \}$
- (ii) 上記式の右辺の最適解 $(Y_1^*, \dots, Y_m^*)$ に対し, p^* と $(Y_1^*, \dots, Y_m^*)$ の組は競争均衡

è 効用関数が陽に与えられている場合,

次の手順で均衡の計算ができる (もし存在するならば)

- (1) $\sum_{i=1}^m f_i(X_i)$ を最大にする財の分割 $(X_1, \dots, X_m)$ を計算
- (2) $X_i \in D_i(p^*)$ ($i = 1, \dots, m$) を満たす価格 p^* を計算

粗代替性を満たす効用関数の特殊ケースにおいて,

- (1) は最小費用流問題に帰着して計算可能
- (2) は最短路問題を用いて計算可能 (à 存在の証明)

最小費用流問題



入力: 有向グラフ $G = (V, E)$

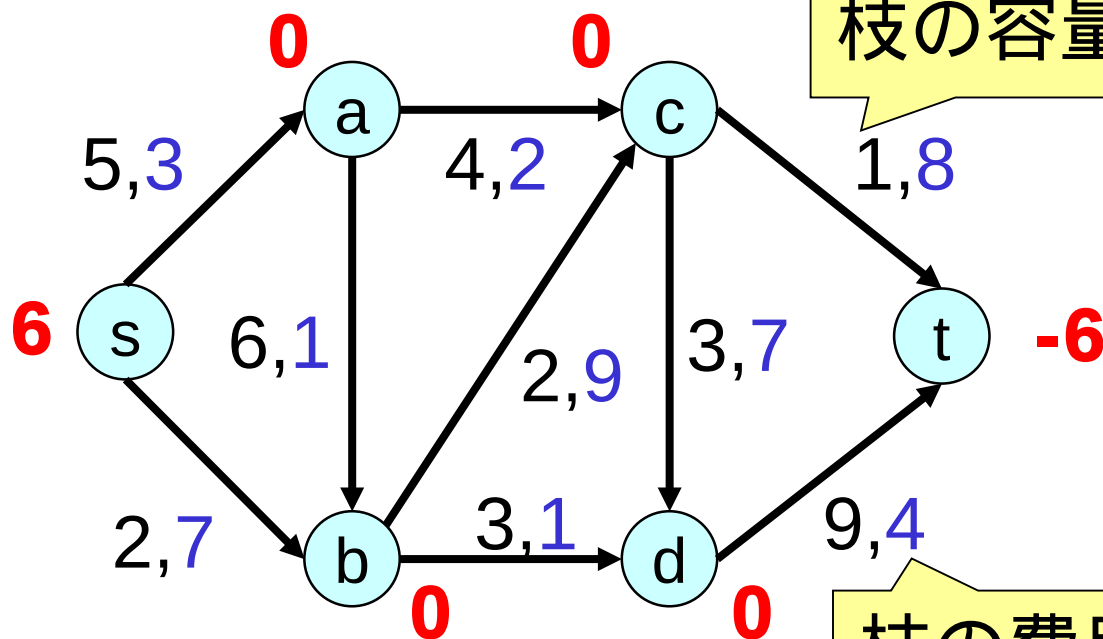
各頂点 $v \in V$ の供給・需要量 b_v (ただし b_v の和は0)

($b_v > 0 \Rightarrow v$ は供給点, $b_v < 0 \Rightarrow v$ は需要点, $b_v = 0 \Rightarrow v$ は通過点)

各枝 $(u, v) \in E$ の容量 $c_{uv} \geq 0$, 費用 γ_{uv}

出力: 需要供給を満たすフローで総費用が最小のもの

例: 製品の配送
工場 $\rightarrow$ 供給点
商店 $\rightarrow$ 需要点
配送トラックの台数
 $\rightarrow$ 各枝のフロー



最小費用流問題の定式化



目的: フローの総費用を最小に

最小化: $\sum_{(u,v) \in E} x_{uv}$

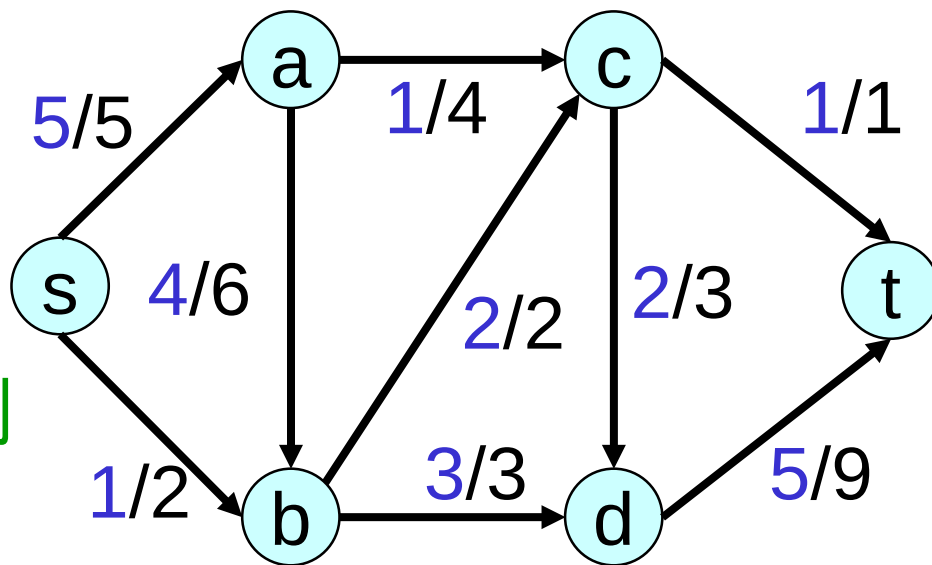
条件1 (容量条件): $0 \leq x_{uv} \leq c_{uv} \quad (\forall (u,v) \in E)$ 各枝を流れるフローの量 枝の容量

条件2 (流量保存条件):

頂点から流れ出すフローの量 - 流れ込むフローの量
= 需要供給量

$$\sum_{v:(u,v) \in E} x_{uv} - \sum_{v':(v',u) \in E} x_{v'u} = b_u \quad (\forall u \in V)$$

実行可能解の例



財配分問題から 最小費用流問題への帰着

財の配分問題から最小費用流問題へ

複数財の配分問題

- 入力: 財の集合 $N=\{1,2,\dots,n\}$
m 人のオークション参加者の効用関数 $f_i: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ ($i=1,2,\dots,m$)
- 出力: 効用関数の和 $\sum_{i=1}^m f_i(X_i)$ を最大化する N の分割 $(X_1, \dots, X_m)$

各 f_i が以下の効用関数のとき, 最小費用流問題に帰着可能

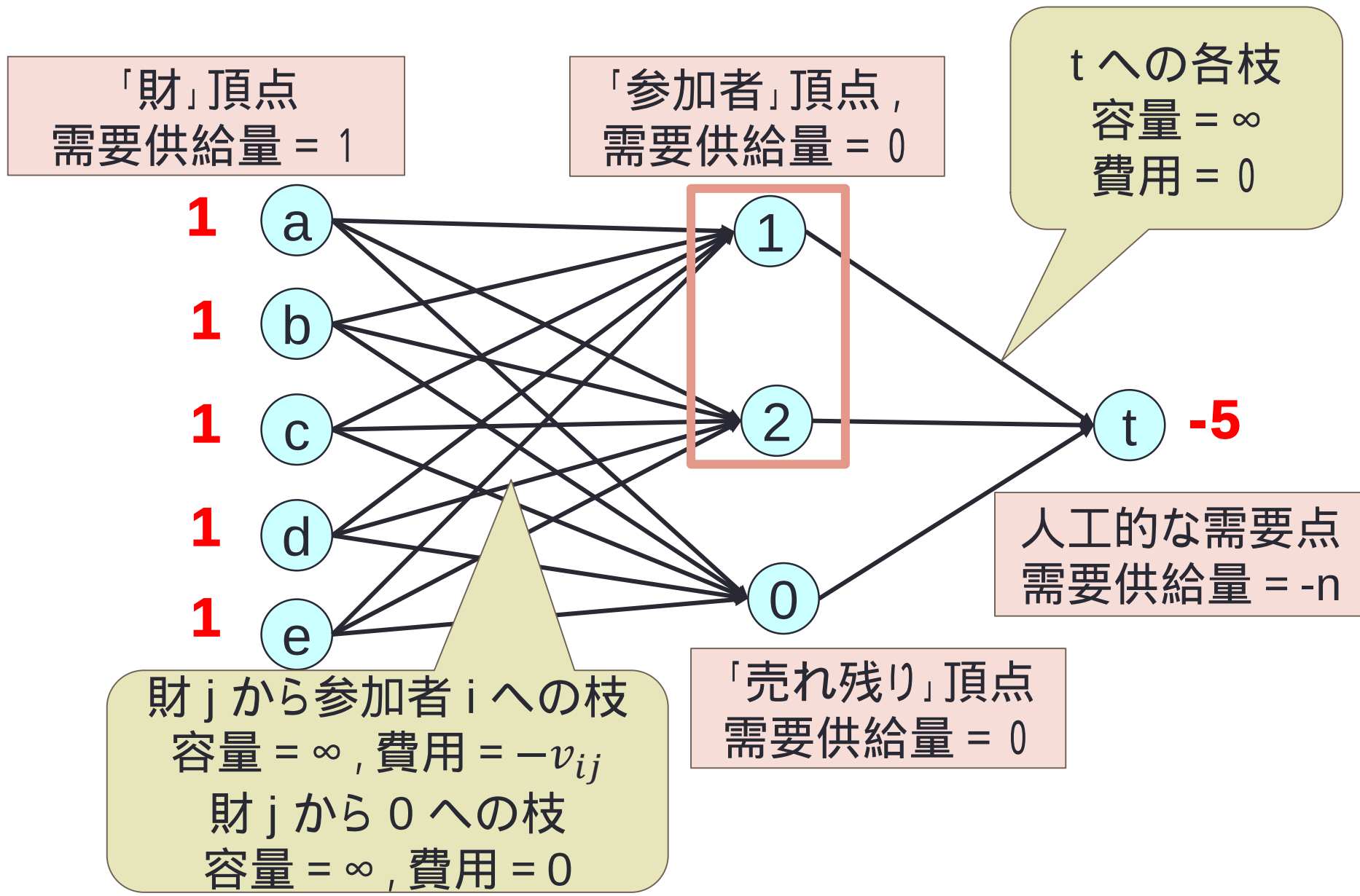
- additive valuation (含む single-minded valuation)
- unit-demand valuation
- assignment valuation

考え方: n 個の財を m 人の誰かに割り当てる or 「売れ残り」へ

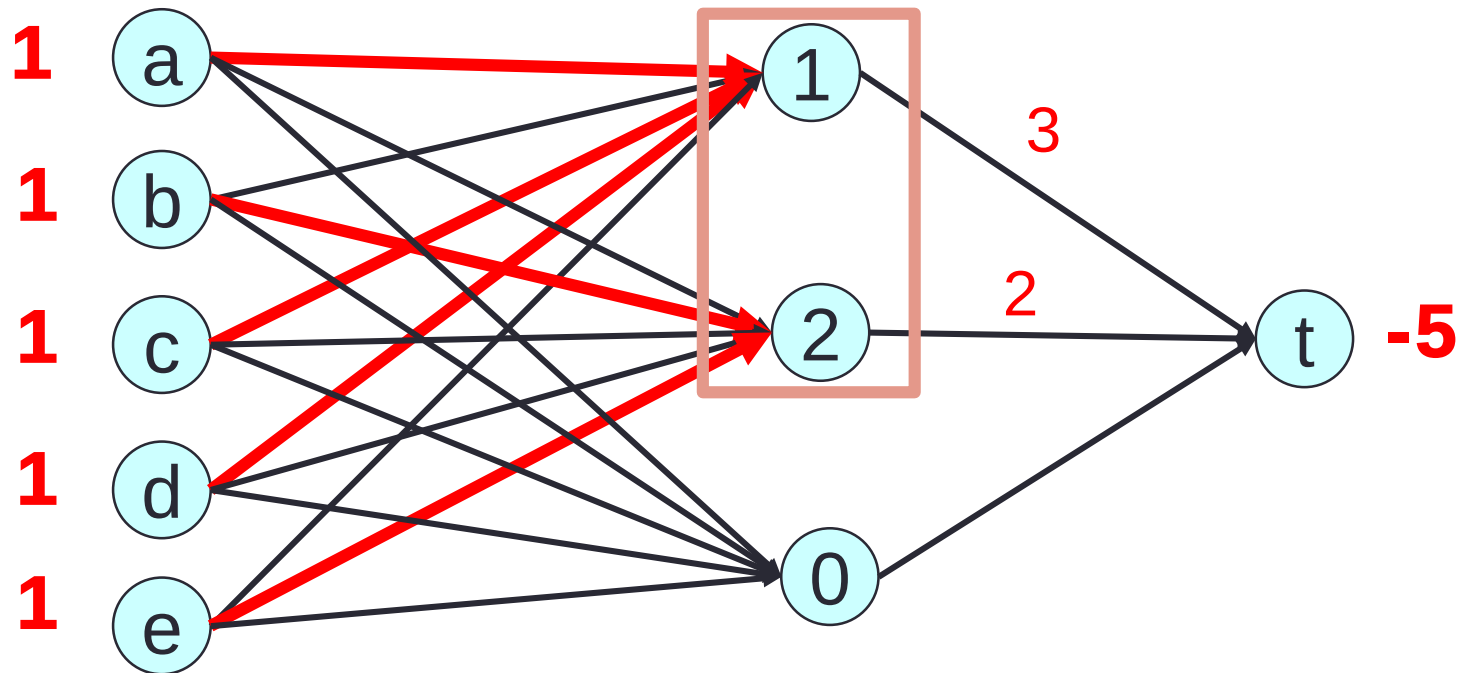
効用関数の例

- **additive valuation**: 各商品 j の価値 v_{ij} を用いて $f_i(X) = \sum_{j \in X} v_{ij}$
- **unit-demand valuation**: 各商品 j の価値 v_{ij} を用いて
$$f_i(X) = \max_{j \in X} v_{ij} \quad (\text{ただし } f(\emptyset) = 0)$$
- **demand が k 個のバージョン (k-demand valuation)** :
 $f_i(X) = \{v_{ij} | j \in X\}$ の大きい方から $\min\{k, |X|\}$ 個の和

additive valuation の場合の帰着



additive valuation の場合の帰着



整数値実行可能フロー --- 財の参加者への割り当てと見なせる
「 X_i = 参加者 i に割り当てられた財すべて」とおく

è フローの費用 $= -\sum_{i=1}^m f_i(X_i)$

最小費用フローから, 財配分問題の最適解が得られる

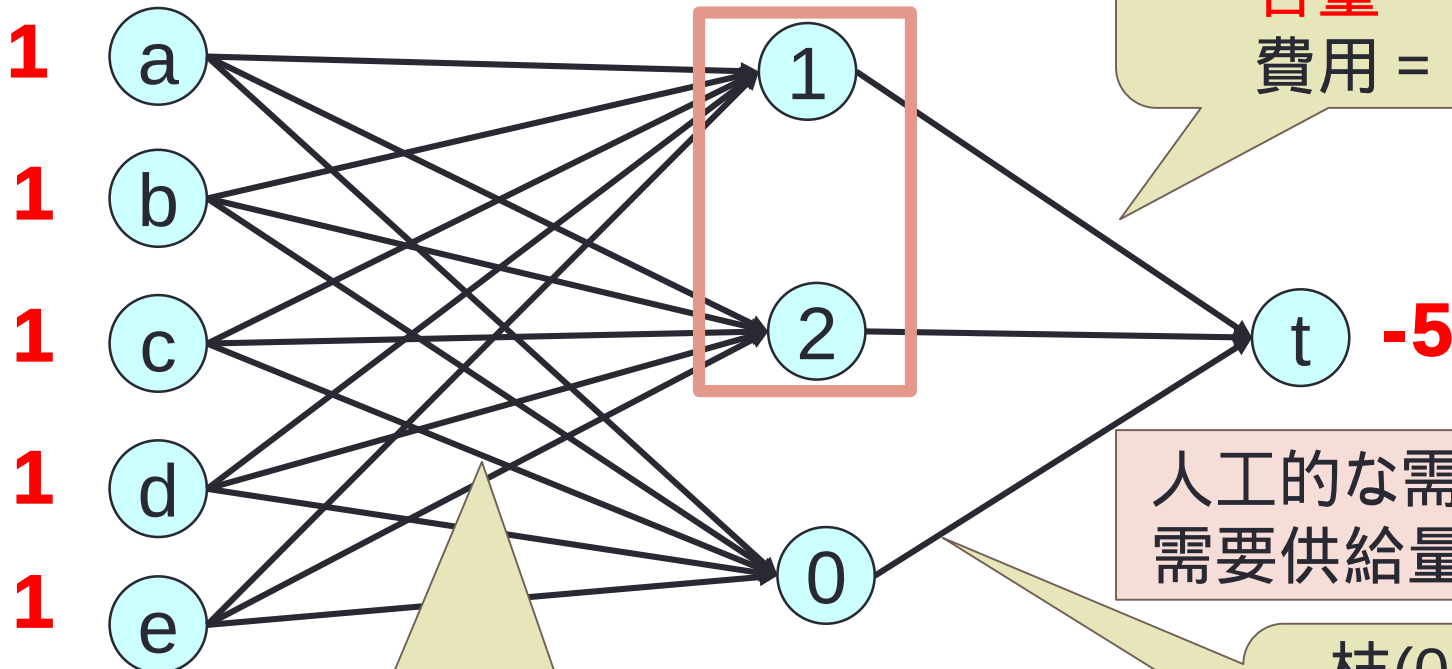
unit-demand valuation の場合の帰着

「各参加者の受け取る財の数 1」と仮定して良い

「財」頂点
需要供給量 = 1

「参加者」頂点,
需要供給量 = 0

枝(i, t) ($i=1, \dots, n$)
容量 = 1
費用 = 0



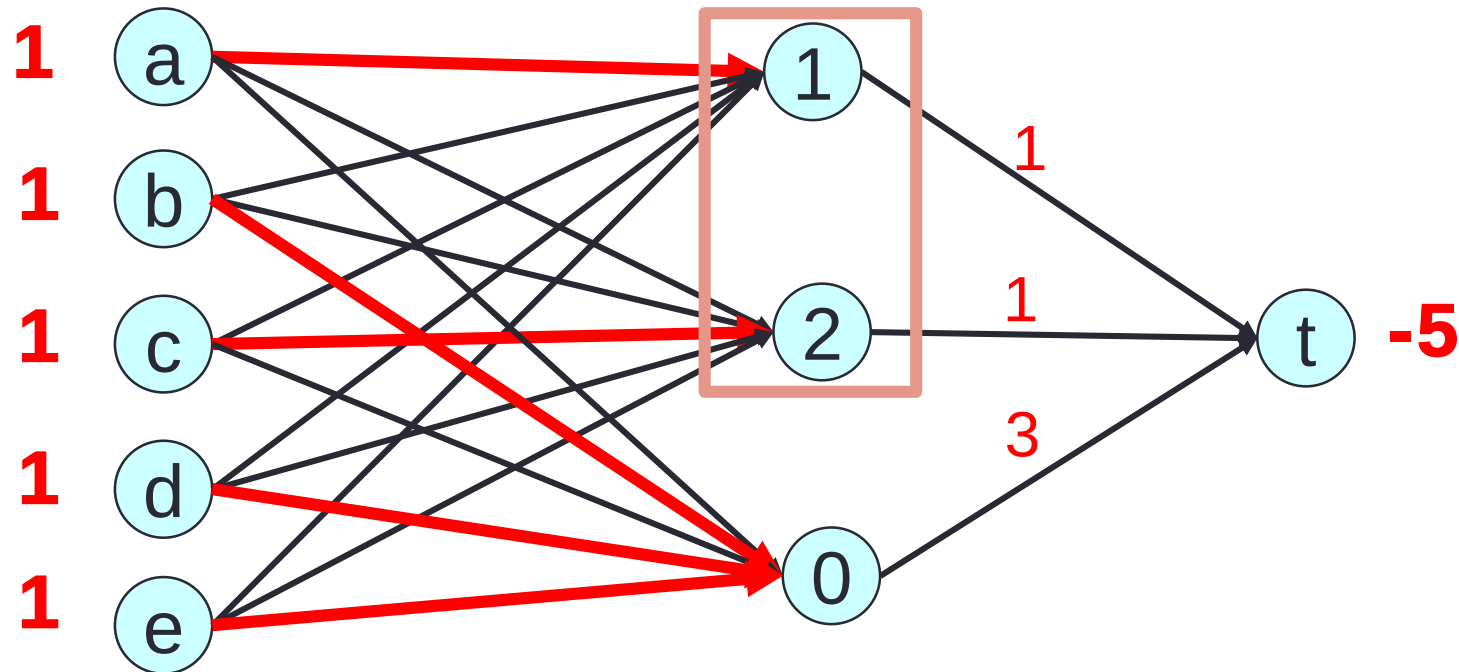
財 j から参加者 i への枝
容量 = ∞ , 費用 = $-v_{ij}$
財 j から 0 への枝
容量 = ∞ , 費用 = 0

「売れ残り」頂点
需要供給量 = 0

枝($0, t$)
容量 = ∞
費用 = 0

人工的な需要点
需要供給量 = $-n$

unit-demand valuation の場合の帰着



整数値実行可能フロー --- 財の参加者への割り当てと見なせる
 「 X_1 = 参加者 1 に割り当てられた財, および売れ残り全て」,
 「 X_i = 参加者 i に割り当てられた財」 ($i=2, \dots, m$) とおく
 è **フローの費用** $= -\sum_{i=1}^m f_i(X_i)$
 最小費用フローから, 財配分問題の最適解が得られる

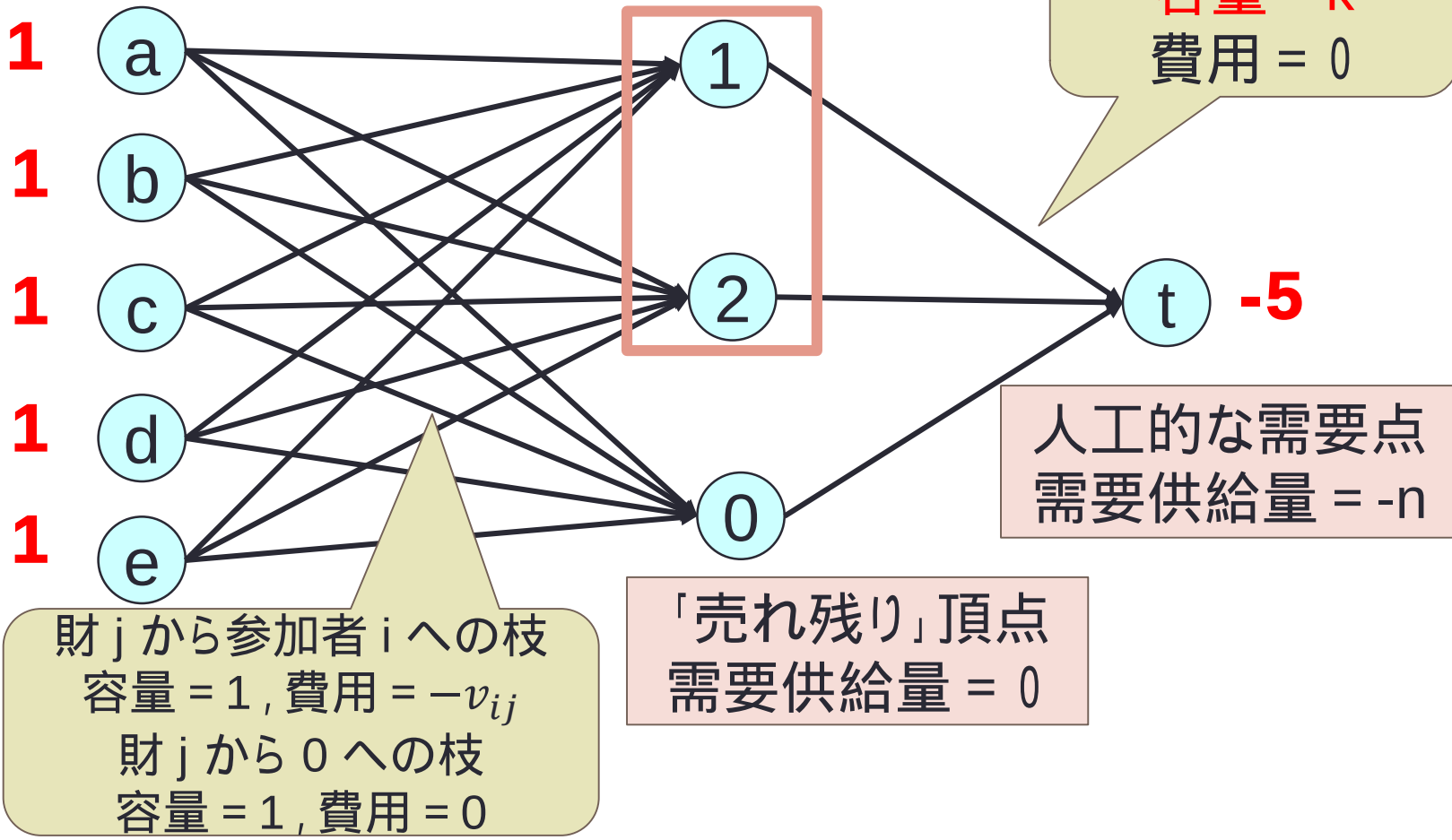
k-demand valuation の場合の帰着

「各参加者の受け取る財の数 k 」と仮定して良い

「財」頂点
需要供給量 = 1

「参加者」頂点,
需要供給量 = 0

t への各枝
容量 = k
費用 = 0



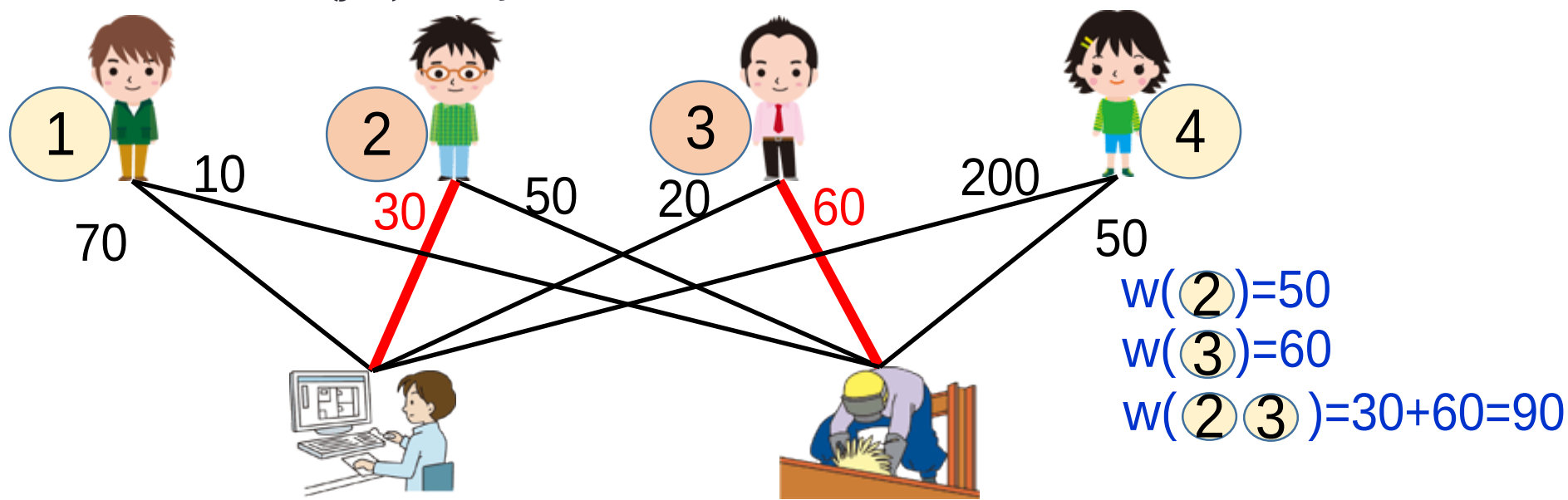
割当効用関数

- **assignment valuation**: 最大重みマッチングで定まる効用関数
イメージーある企業の就職担当が、
k人の労働者(「商品」)を雇って、k個の仕事に割り当てたい

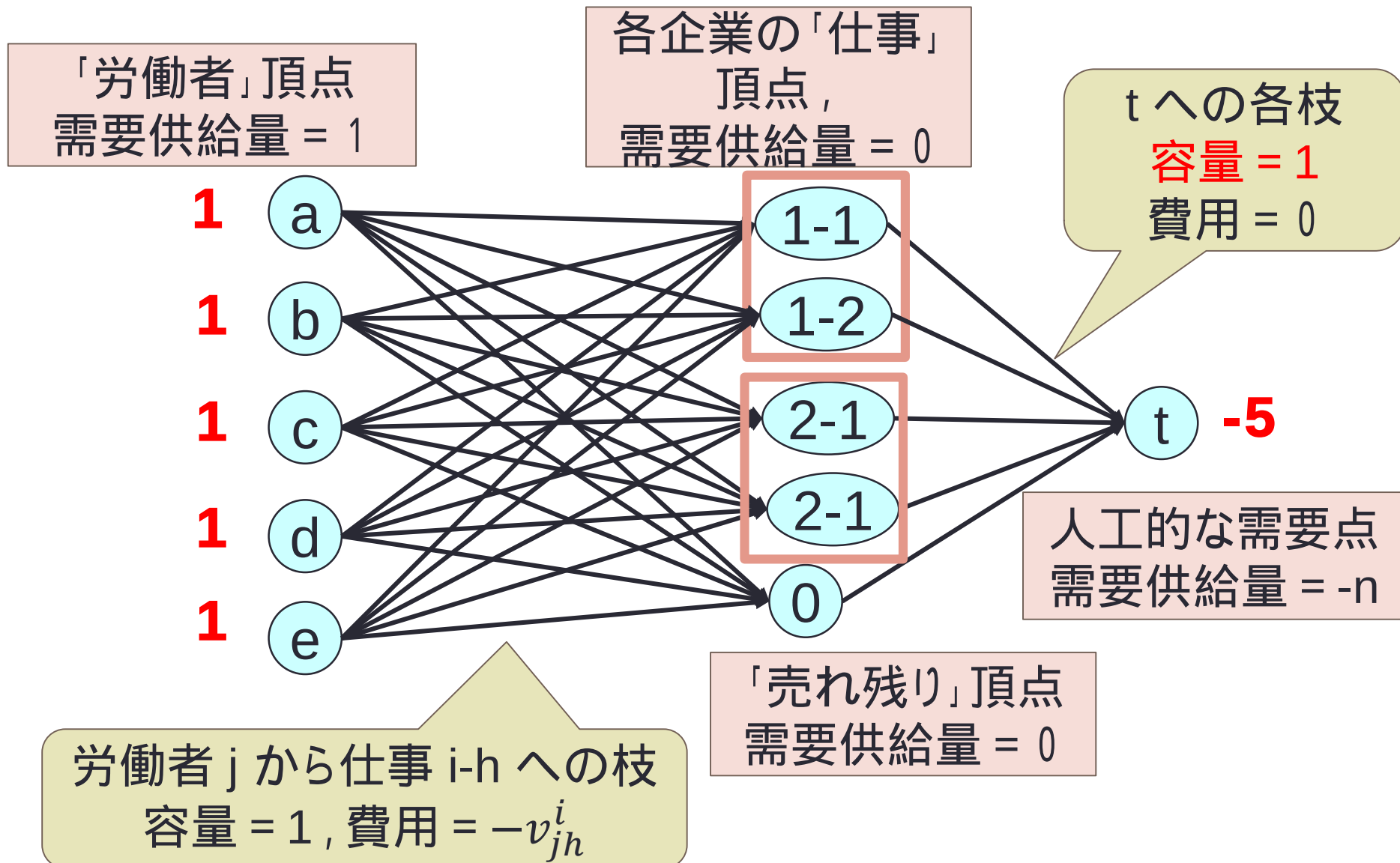
v_{jh}^i = 労働者 j を仕事 $h=1,2,\dots,k$ に割り当てたときの利益

$f_i(X)$ = 労働者 X を仕事 $1,2,\dots,k$ に割り当てたときの最大利益

$$= \max \left\{ \sum_{(j,h) \in M} v_{jh}^i \mid M: \text{マッチング}, \partial M \cap N = X \right\}$$

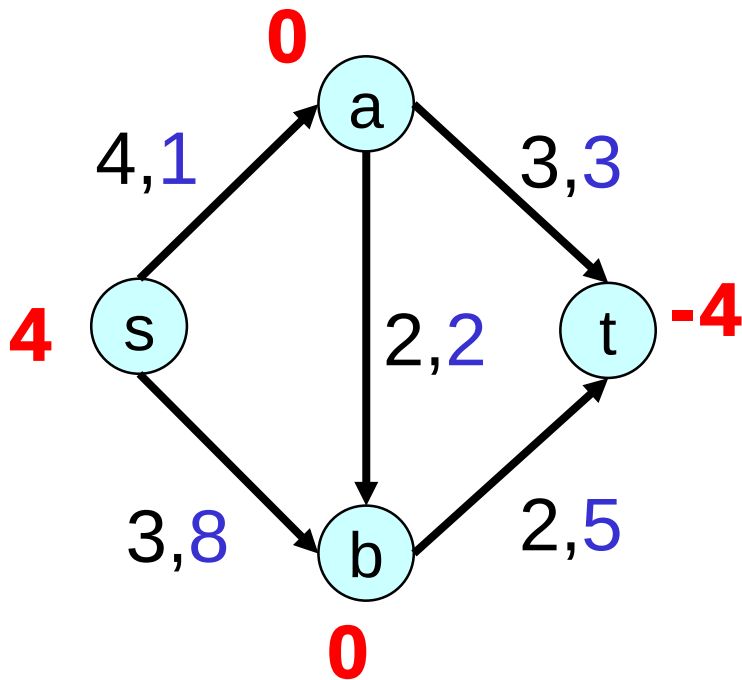
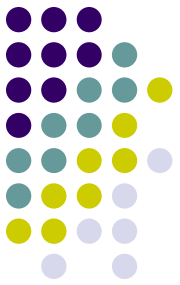


assignment valuation の場合の帰着



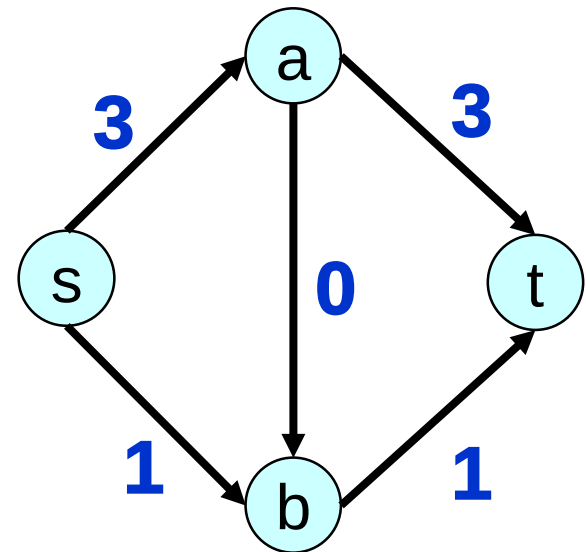
最小費用流の求め方

フローの最適性判定



問題例

フローの例



フローの費用 = 25
最小か？

どうやって最小費用のフローであることを判定するか？

- - - 残余ネットワークの利用

残余ネットワークの作り方(その1)



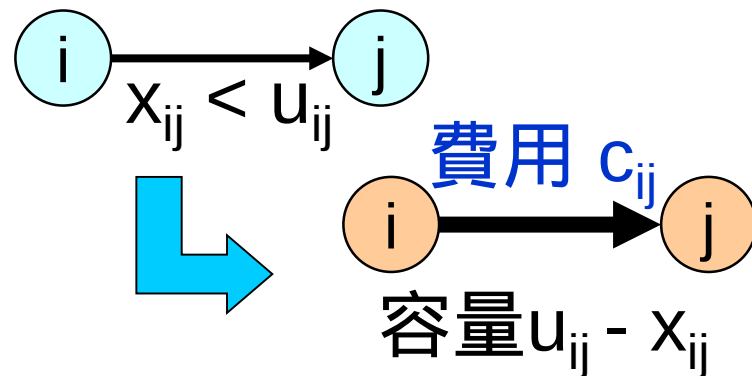
$x = (x_{ij} \mid (i,j) \in E)$: 現在のフロー

→ フロー x に関する残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$
 $E^x = F^x \cup R^x$

順向きの枝集合

$F^x = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E, x_{ij} < u_{ij} \}$

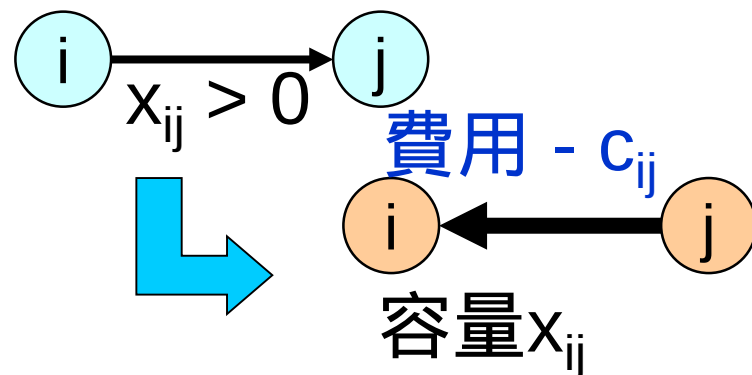
容量 $u^x_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$, 費用 c_{ij}



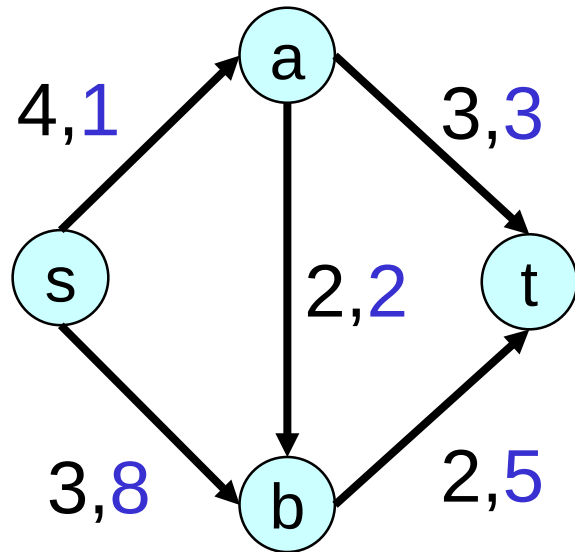
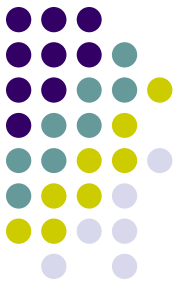
逆向きの枝集合

$R^x = \{ (j, i) \mid (i, j) \in E, x_{ij} > 0 \}$

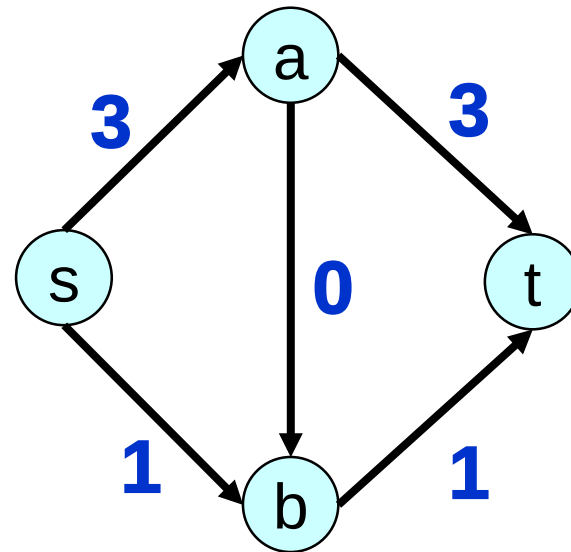
容量 $u^x_{ji} = x_{ij}$, 費用 $-c_{ij}$



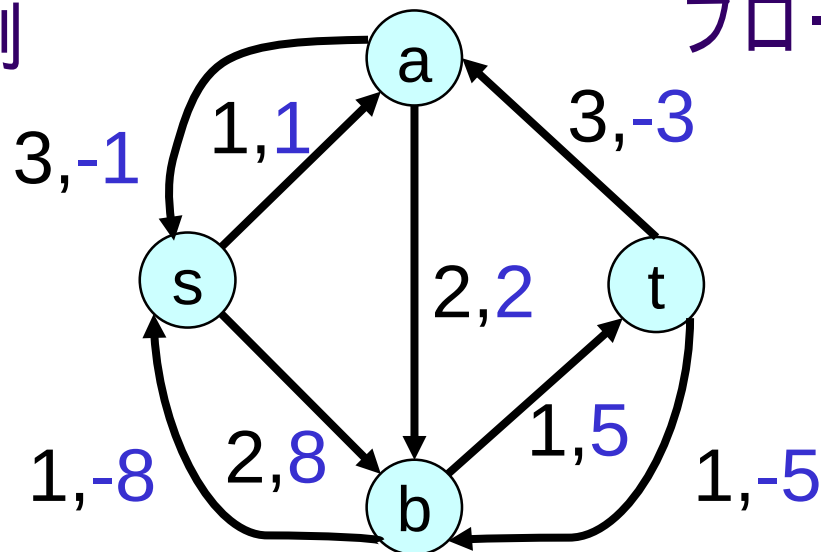
残余ネットワークの作り方(その2)



問題例



フローの例



残余ネットワーク

残余ネットワークの性質(1)



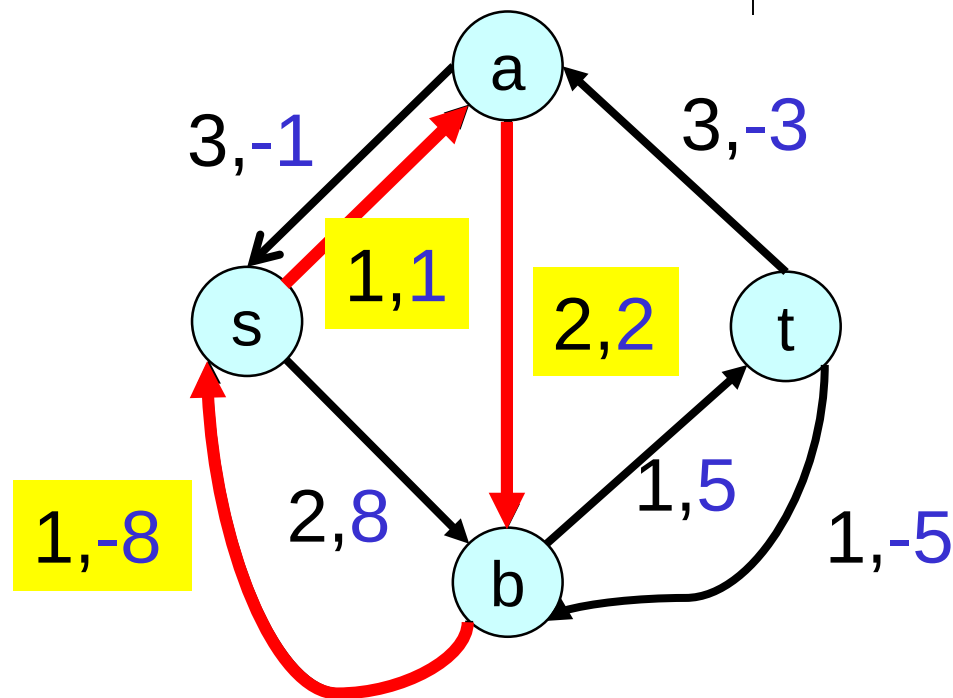
残余ネットワークの閉路に注目

閉路の容量 α

= 閉路に含まれる枝の
容量の最小値 = 1

閉路の費用 γ

= 閉路に含まれる枝の
費用の和 = -5



定理 1 : 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
フローの費用を減少させることが可能
現在のフローは費用最小でない

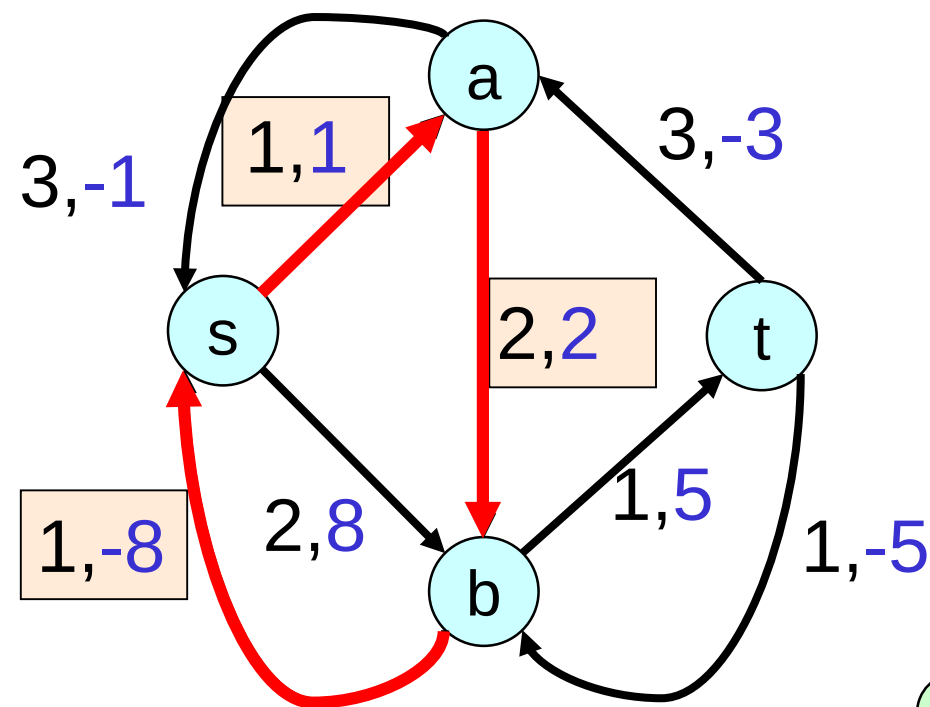
定理1の証明の概略



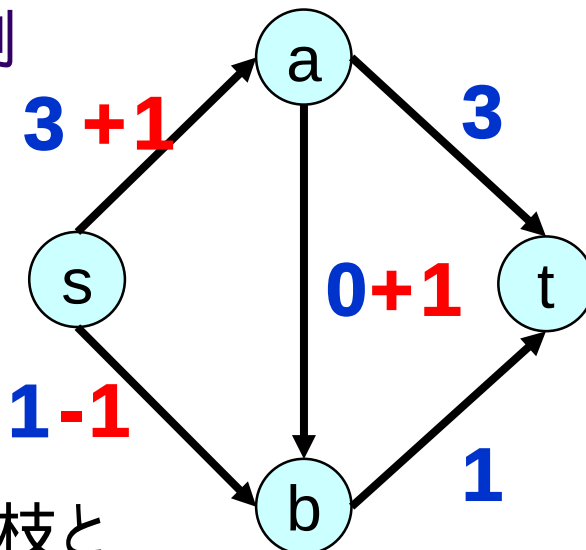
費用が負の閉路を用いて、フローの費用を減少できる

残余ネットワーク

フローの例



閉路の容量 $\alpha = 1$
閉路の費用 $\gamma = -5$



閉路の枝と

同じ向き フロー値に $+\alpha$
逆の向き フロー値に $-\alpha$
無関係 フロー値は不変

この更新により、フローの費用は
 $\alpha \gamma (= -5)$ 変化
(より費用の小さいフローを得る)

残余ネットワークの性質(その3)



以上の議論より、以下が成り立つ

定理 1 : 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
フローの費用を減少させることが可能
現在のフローは費用最小でない

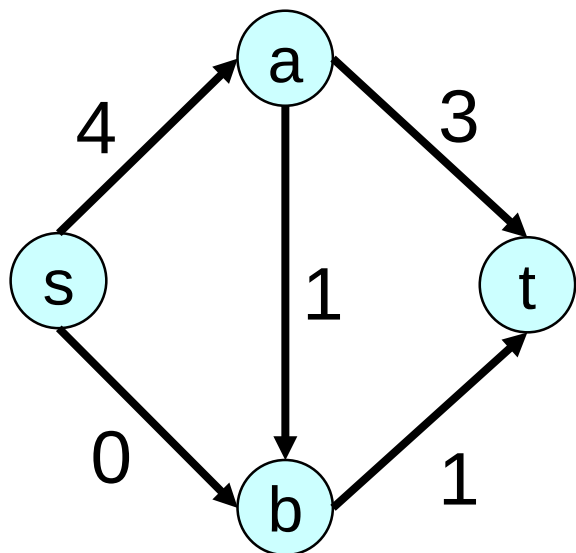
実は、逆も成り立つ(証明は省略)

定理 2 : 現在のフローは費用最小でない
残余ネットワークに費用が負の閉路が存在

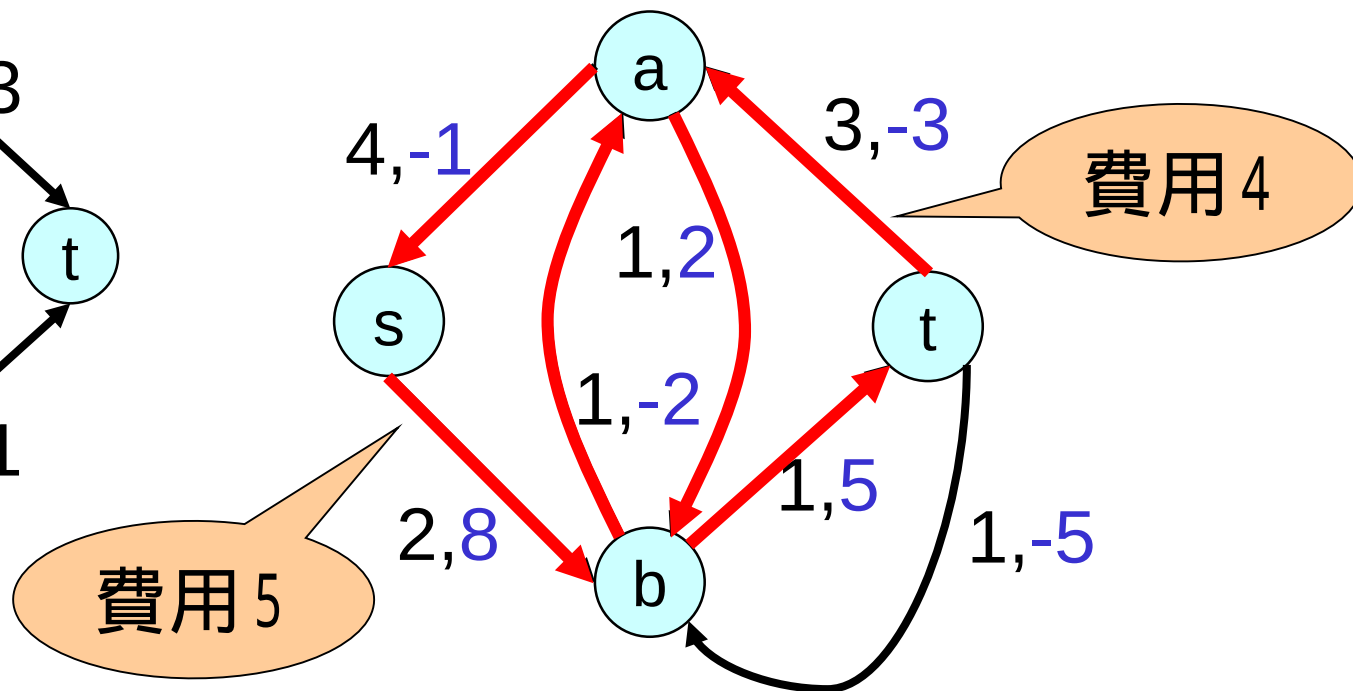
残余ネットワークの性質(その4)



修正後のフロー



残余ネットワーク



費用が負の閉路がない
現在のフローは費用最小

負閉路消去アルゴリズム



最小費用フローを求めるためのアルゴリズム

ステップ0: 人工問題を解いて, 需要供給量を満たすフローを求める

ステップ1: 現在のフローに関する残余ネットワークを作る

ステップ2: 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在しない

現在のフローは費用最小(終了)

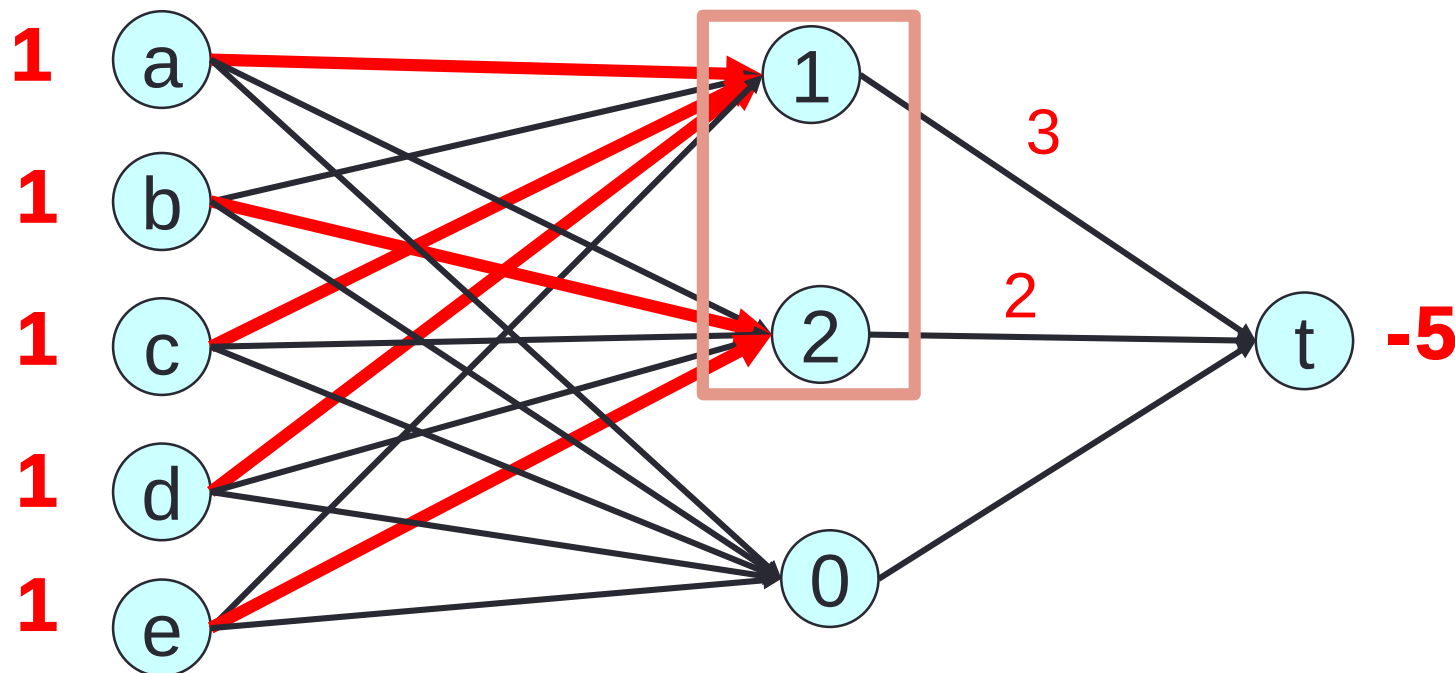
ステップ3: 残余ネットワークの費用が負の閉路を求め、

それを用いて現在のフローを更新する

ステップ4: ステップ1へ戻る

均衡価格の計算

additive valuation の場合の帰着

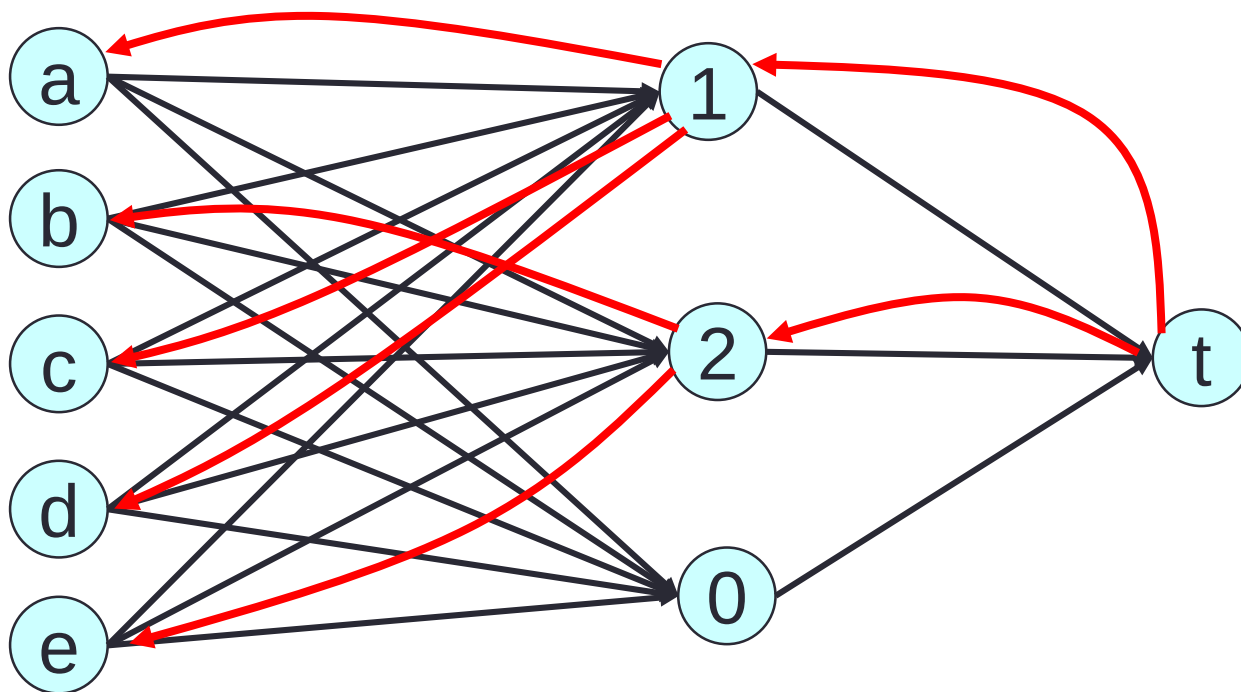


整数値実行可能フロー --- 財の参加者への割り当てと見なせる
「 X_i = 参加者 i に割り当てられた財すべて」とおく

è **フローの費用** $= -\sum_{i=1}^m f_i(X_i)$

最小費用フローから, 財配分問題の最適解が得られる

均衡価格の計算: additive valuation の場合



- 最小費用フローに対する残余ネットワークにおいて,
 「枝の長さ $\ell(u, v)$ = 枝の費用 $c(u, v)$ 」として,
 各頂点 v から t への最短路長 $d(v)$ を計算
 è 各財に対して $p(j) = -d(v)$ とおくと, 均衡価格
- 残余ネットワークに負閉路が存在しない è 最短路長は有限値

需要集合の条件: additive valuation

- **additive valuation**: 各商品 j の価値 v_{ij} を用いて

$$f_i(X) = \sum_{j \in X} v_{ij}$$

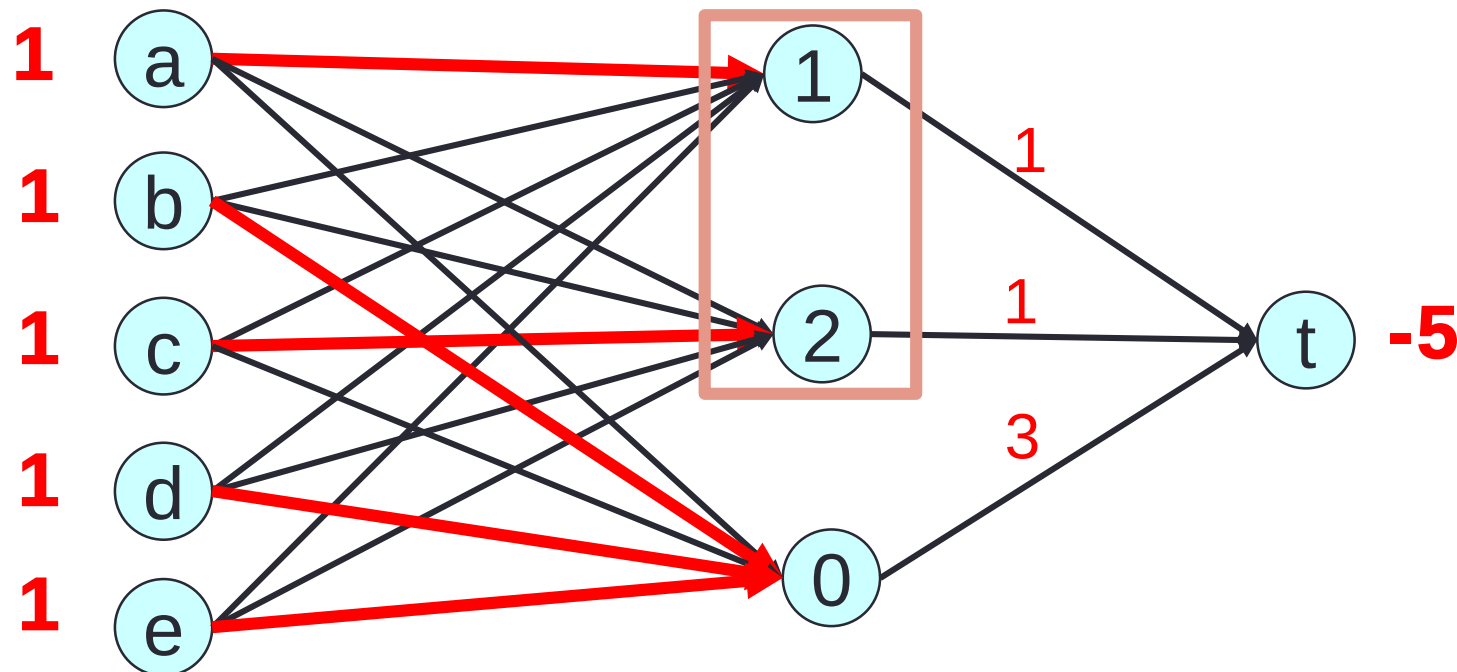
このとき, $X \in D_i(p)$

$$\Leftrightarrow v_{ij} - p(j) \geq 0 \ (\forall j \in X), v_{ij} - p(j) \leq 0 \ (\forall j \in N \setminus X)$$

均衡価格の計算: additive valuation の場合

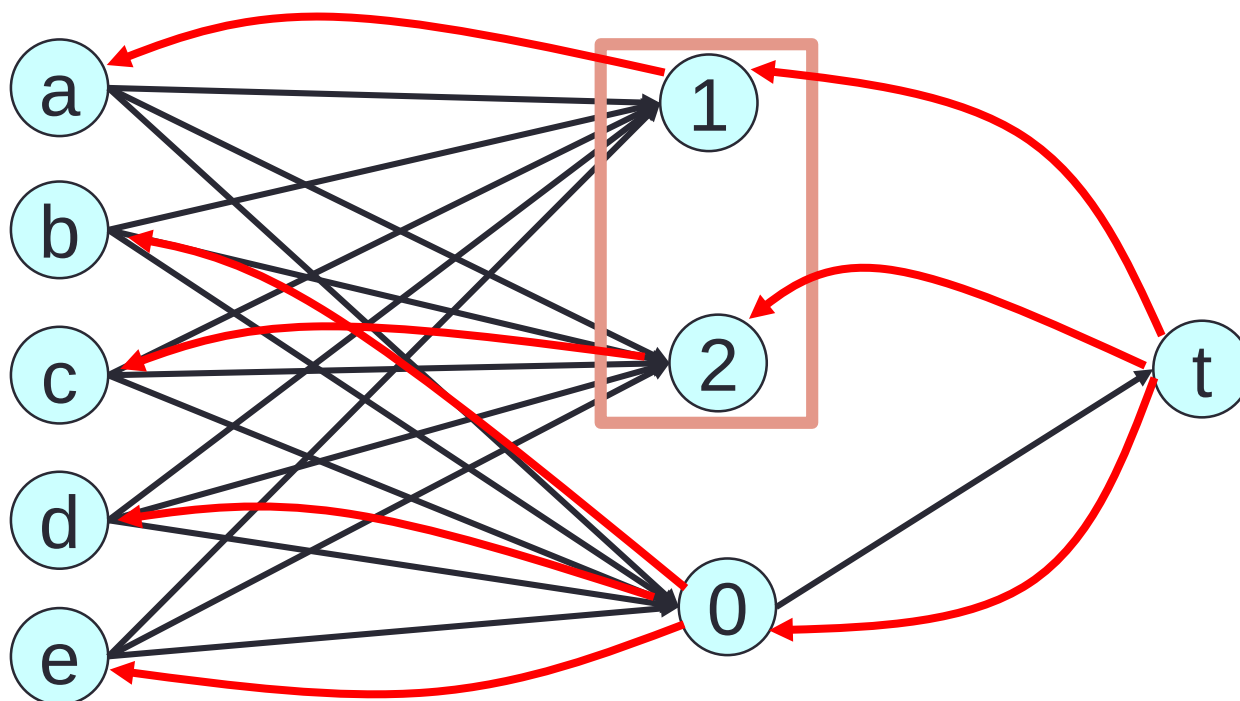
- 最短路長の性質より, 各枝 (u,v) に対して $d(u) \leq d(v) + \ell(u,v)$
- 負閉路が存在しないので, $d(t)=0$
- t に入る枝, 出る枝はいずれも $\ell(u,v) = c(u,v) = 0$
 $\Rightarrow d(t)=0$ なので, 各「参加者」頂点 v に対し $d(v)=0$
- 財 j が参加者 i に割り当てられていない
 $\Rightarrow$ 枝 (j,i) は残余ネットワークに存在
 $\Rightarrow d(j) \leq d(i) + \ell(j,i) = 0 - v_{ij} \quad v_{ij} - p(j) \leq 0$
- 財 j が参加者 i に割り当てられている
 $\Rightarrow$ 枝 $(i,j), (j,i)$ が残余ネットワークに存在
 $\Rightarrow 0 = d(i) = d(j) + \ell(i,j) = d(j) + v_{ij}$
- よって, 財 j が参加者 i^* に割り当てられたとき,
 $v_{i^*j} = -d(j) \geq v_{ij} \quad (\forall i = 1, \dots, m) \quad v_{ij} - p(j) = 0$
- 以上のことから, 財 j の価格を $p(j) = -d(j)$ とおくと, これは均衡価格

unit-demand valuation の場合の帰着



整数値実行可能フロー --- 財の参加者への割り当てと見なせる
 「 X_1 = 参加者 1 に割り当てられた財, および売れ残り全て」,
 「 X_i = 参加者 i に割り当てられた財」 ($i=2, \dots, m$) とおく
 è **フローの費用** $= -\sum_{i=1}^m f_i(X_i)$
 最小費用フローから, 財配分問題の最適解が得られる

均衡価格の計算: unit-demand valuation の場合



- 最小費用フローに対する残余ネットワークにおいて,
 「枝の長さ $\ell(u, v)$ =枝の費用 $c(u, v)$ 」として,
 各頂点 v から t への最短路長 $d(v)$ を計算
 è 各財に対して $p(j) = -d(v)$ とおくと, 均衡価格
- 残余ネットワークに負閉路が存在しない è 最短路長は有限値

需要集合の条件: unit-demand valuation

- **unit-demand valuation**: 各商品 j の価値 v_{ij} を用いて

$$f_i(X) = \max_{j \in X} v_{ij} \quad (\text{ただし } f(\emptyset) = 0)$$

このとき, $X \in D_i(p)$ かつ $j^* \in \arg \max_{j \in X} v_{ij}$ に対し, 以下が成立:

- $\forall j \in X \setminus \{j^*\}: p(j) = 0$
 - $v_{ij^*} - p(j^*) \geq \max_{j' \in X \setminus \{j^*\}} v_{ij'}$
 (かつ $\forall j \in X: v_{ij} - p(j) \leq v_{ij^*} - p(j^*)$)
 - $\forall j \in N \setminus X: v_{ij} - p(j) \leq v_{ij^*} - p(j^*)$
- かつ X は $v_{ij} - p(j)$ 最大の $j = j^* \in N$ を一つ以上含む
 各 $j \in X \setminus \{j^*\}$ は $p(j) = 0$ を満たす

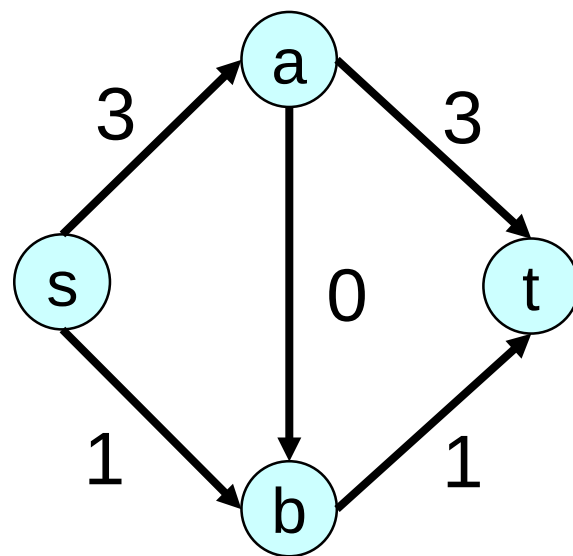
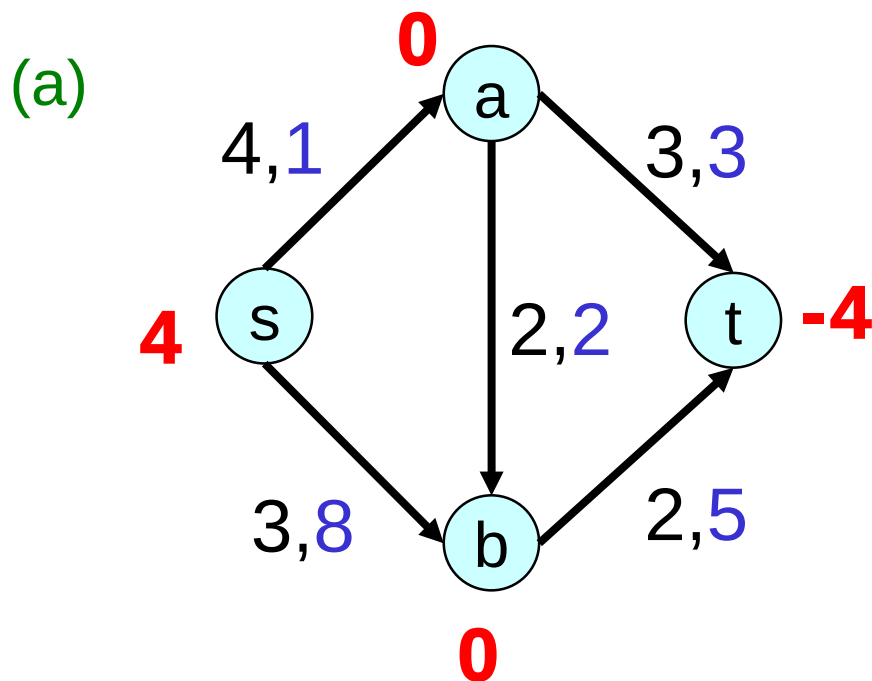
均衡価格の計算: unit-demand valuation の場合

- 最短路長の性質より, 各枝 (u,v) に対して $d(u) \leq d(v) + \ell(u,v)$
- 負閉路が存在しないので, $d(t)=0$
- 枝 $(0,t)$, $(t,0)$ が残余ネットワークに存在, 長さはどちらも 0
è $d(t)=0$ なので $d(0)=0$
- 売れ残った財 j に対し, 枝 $(j,0)$, $(0,j)$ が残余ネットワークに存在
è $d(0)=0$ なので $d(j)=0$ è $p(j)=0$
- 財 j^* が参加者 i に割り当てられた è 枝 (i,j^*) , (j, i^*) が残余ネットワークに存在
è $d(i) = d(j^*) + \ell(i,j^*) = d(j^*) + v_{ij^*}$
- 財 j が参加者 i に割り当てられていない
è 枝 (j, i) は残余ネットワークに存在 è $d(j) \leq d(i) + \ell(j,i) = d(i) - v_{ij}$
- よって, 財 j^* が参加者 i に割り当てられたとき,
$$v_{ij^*} + d(j^*) = d(i) \geq v_{ij} + d(j) \quad (\forall j = 1, \dots, n)$$
- 以上のことから, 財 j の価格を $p(j) = -d(j)$ とおくと, これは均衡価格

レポート問題



問1: 次の最小費用フロー問題(a), (b), (c) について考える.
与えられた初期フローに対して負閉路消去アルゴリズムを適用し, 最小費用フローを求めよ
(各反復での残余ネットワークおよびフローを書くこと)

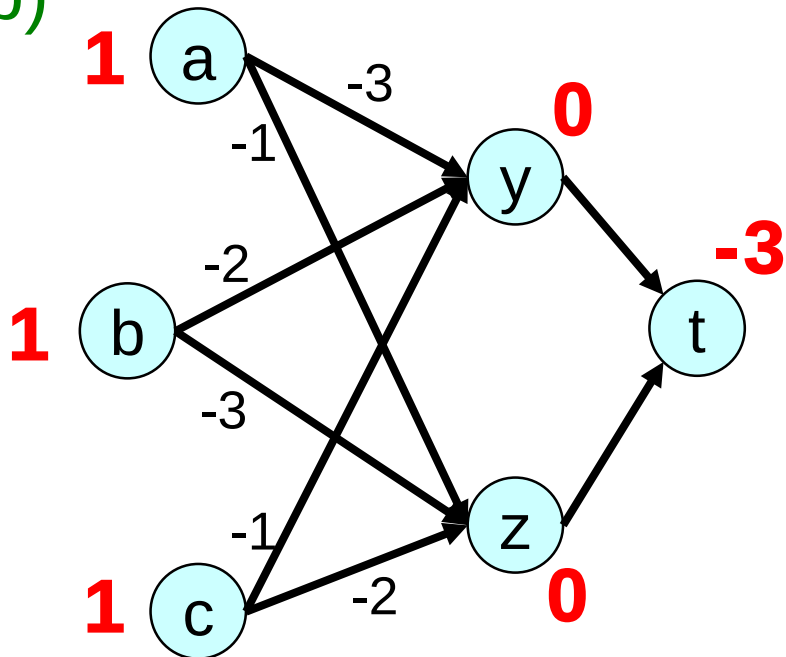


初期フロー

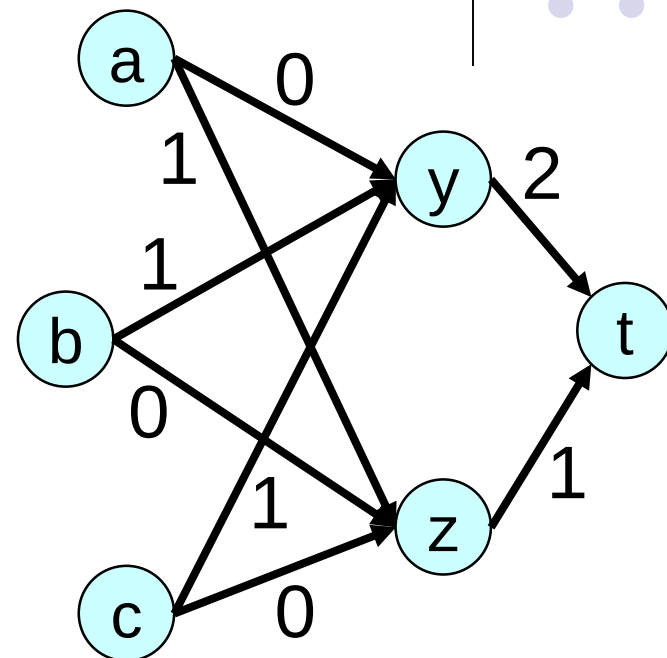
レポート問題



(b)



初期フロー

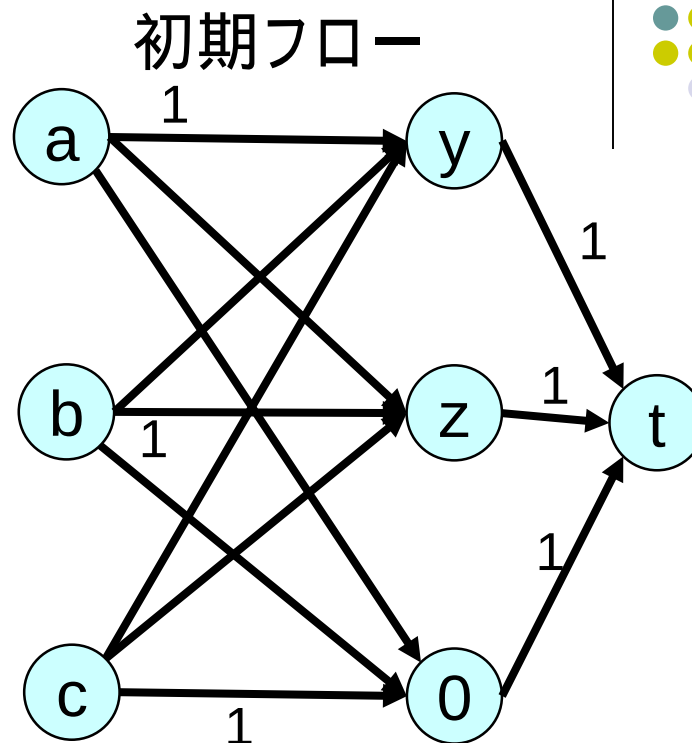
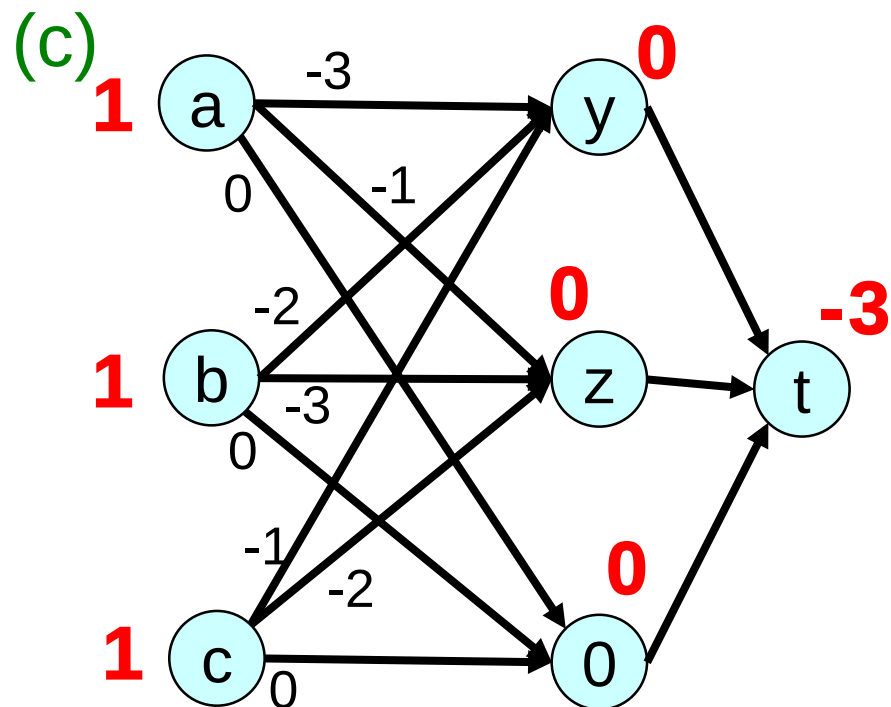


全ての枝の容量は $+\infty$

t に入る枝の費用は 0 , それ以外は各枝の数値を参照

(b) については , 最小費用フローに関する残余ネットワークにおいて , 各頂点から t への最短路長を計算せよ .

レポート問題



(y,t), (z,t) の容量は1, それ以外の枝の容量は $+\infty$
t に入る枝の費用は0, それ以外は各枝の数値を参照

(b),(c) については, 最小費用フローに関する残余ネットワークにおいて, 各頂点から t への最短路長を計算せよ.