

経済学特講II 第3回

競争均衡の計算のための
繰り返しオークションの数理
---離散凸解析の視点からの理解---

塩浦昭義

今日の内容

- 単改良性, M^H 凹性
- 粗代替性との等価性

効用関数の粗代替性

定理[Kelso-Crawford(1982), et al.]:

f_i は**粗代替性**を満たす $\Rightarrow$ 競争均衡が存在

粗代替性 ある商品が値上がりしたら、
他の商品の欲しさが高まる

定義: 効用関数 $f_i: 2^N \rightarrow \mathbb{Z}_+$ の

粗代替性(gross-substitutes condition)

$$\forall p \in \mathbb{R}^N, \forall j \in N, \forall \lambda > 0,$$

$$\forall X \in D_i(p), \exists Y \in D_i(p + \lambda e_j) \text{ s.t. } X \setminus \{j\} \subseteq Y$$

単改良性

記号の定義: $p(X) \equiv \sum_{j \in X} p_j$

$X \subseteq N, u, v \in N$ に対し, $X + v = X \cup \{v\}, X - u = X \setminus \{u\}$

定義: 単改良性(single improvement condition) [Gul-Stacchetti(1999)]

$\forall p \in \mathbb{R}^N, \forall X \subseteq N$, if $X \notin D_i(p)$ è (i) or (ii) or (iii) **成立**

(i) $\exists u \in X: f_i(X - u) - p(X - u) > f_i(X) - p(X)$

(ii) $\exists v \in N \setminus X: f_i(X + v) - p(X + v) > f_i(X) - p(X)$

(iii) $\exists u \in X, \exists v \in N \setminus X: f_i(X - u + v) - p(X - u + v) > f_i(X) - p(X)$

利得が最大でない è 商品1個の削除, 追加, または交換により
利得を増やすことが可能

定理[Gul-Stacchetti(1999)]:

効用関数 f_i は**粗代替性**を満たす ς è **単改良性**を満たす

単改良性を満たす効用関数の例

additive valuation $f_i(X) = \sum_{j \in X} v_{ij}$

このとき, $X \in D_i(p)$ かつ X は $v_{ij} - p_j > 0$ なる j をすべて含む

$v_{ij} - p_j < 0$ なる j をすべて含まない

($v_{ij} - p_j = 0$ なる j はどちらでも可)

なので,

$X \notin D_i(p)$ かつ $v_{ij} - p_j > 0$ なる j が含まれない

または $v_{ij} - p_j < 0$ なる j を含む

は $f_i(X \cup \{j\}) > f_i(X)$ または $f_i(X \setminus \{j\}) > f_i(X)$ 成立

単改良性を満たさない効用関数の例

$$N=\{1,2,3,4\}, w_1 = 2, w_2 = 3, w_3 = 3, w_4 = 5$$

$$f_i(X) = \max\{\sum_{j \in Y} w_j \mid \sum_{j \in Y} w_j \leq 7\}$$

$$f_i(\{2,3\}) = 6 < 7 = f_i(\{1,4\}) = \max_{Y \subseteq N} f_i(Y)$$

$$\text{è } \{2,3\} \notin D_i(0)$$

しかし、 $X=\{2,3\}$ の要素1個の削除, 追加, または交換により
利得を増やすことが不可能

単改良性と利得最大化

単改良性を満たすとき、利得が最大か否かのチェックが容易

命題: 効用関数 f_i は単改良性を満たすと仮定, $\forall p \in \mathbb{R}^N, \forall X \subseteq N,$

$X \in D_i(p) \Leftrightarrow$

$$(i) \forall u \in X: f_i(X - u) - p(X - u) \leq f_i(X) - p(X)$$

$$(ii) \forall v \in N \setminus X: f_i(X + v) - p(X + v) \leq f_i(X) - p(X)$$

$$(iii) \forall u \in X, \forall v \in N \setminus X: f_i(X - u + v) - p(X - u + v) \leq f_i(X) - p(X)$$

演習問題 (再掲)

問題2: (第2回目資料の) スライド9, 10の例を考える

(2-a) $\{1\} \in D_A(p)$ (商品1のみの集合が, 参加者Aにとってベスト) となるような価格 p すべてを計算せよ.

同様に, $\{2,5\} \in D_B(p), \{3,4\} \in D_C(p)$ となるような価格 p すべてを計算せよ.

粗代替性と単改良性が等価なことを使ってよい

(2-b) この例での均衡価格すべてを計算せよ.

Aさん: ①を含む商品セットは100, それ以外は0 (single-minded)

Bさん: 重み和 (①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100) (additive)

Cさん: 商品数依存 (symmetric & concave)

(1つ:100, 2つ:180, 3つ:240, 4つ:280, 5つ:300)

演習問題の解答例

問題2: スライド9, 10の例を考える

(2-a) $\{1\} \in D_A(p)$ (商品1のみの集合が, 参加者Aにとってベスト) となるような
価格 p すべてを計算せよ.

粗代替性と単改良性が等価なことを使うと, 計算が容易になる!

$\{1\} \in D_A(p) \iff$

$$(i) \forall u \in \{1\}: f_A(\{1\} - u) - p(\{1\} - u) \leq f_A(\{1\}) - p(\{1\})$$

$$(ii) \forall v \in N \setminus \{1\}: f_A(\{1\} + v) - p(\{1\} + v) \leq f_A(\{1\}) - p(\{1\})$$

$$(iii) \forall u \in \{1\}, \forall v \in N \setminus \{1\}: f_A(\{1\} - u + v) - p(\{1\} - u + v) \leq f_A(\{1\}) - p(\{1\})$$

$\iff$

$$(i) 0 - 0 \leq 100 - p_1$$

$$(ii) \forall j = 2, 3, 4, 5: 100 - (p_1 + p_j) \leq 100 - p_1$$

$$(iii) \forall j = 2, 3, 4, 5: 0 - p_j \leq 100 - p_1$$

$$\iff p_1 \leq 100, p_j \geq 0 \ (j = 2, 3, 4, 5)$$

M[♯]凹性

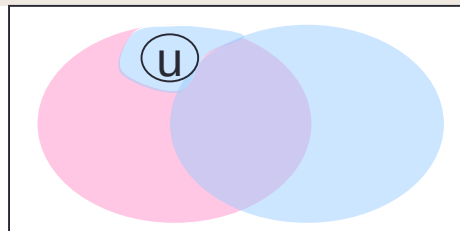
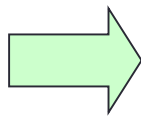
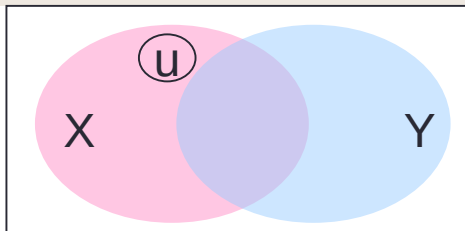
定義: M[♯]凹性(M[♯]-concavity) [Murota-Shioura(1999)]

$\forall X, Y \subseteq N, \forall u \in X \setminus Y$, (i) or (ii) 成立:

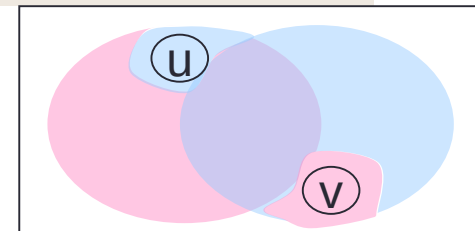
(i) $f(X) + f(Y) \leq f(X - u) + f(Y + u)$

(ii) $\exists v \in Y \setminus X: f(X) + f(Y) \leq f(X - u + v) + f(Y + u - v)$

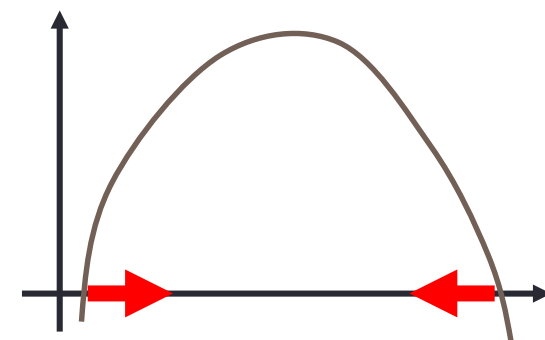
$X \setminus Y = \emptyset$ の
ときは自動的に
に成立



or



- 離散的な凹関数
- 価格ベクトルを使わない性質



定理[Fujishige-Yang (2003)]:

効用関数 f_i は粗代替性を満たす ζ は M[♯]凹性を満たす

演習問題 (再掲)

問題5： 下記のクラスの効用関数が粗代替性を満たすことを証明せよ。

(a) additive valuation, (b) single-minded valuation

(c) symmetric concave valuation, (d) unit-demand valuation

(b) single-minded valuation は additive valuation の特殊ケース
(v_{ij} ($j = 1, \dots, n$)のうち, 高々一つが正の値) なので, 証明の必要なし

粗代替性とM_H凹性は等価 è 代わりにM_H凹性を証明してもよい！
(こちらの方が比較的簡単)

演習問題の解答例

問題5： 下記のクラスの効用関数が粗代替性を満たすことを証明せよ.

(a) additive valuation $f_i(X) = \sum_{j \in X} v_{ij}$

「 $\forall X, Y \subseteq N, \forall u \in X \setminus Y, f_i(X) + f_i(Y) \leq f_i(X - u) + f_i(Y + u)$ **成立**」を証明

$$\begin{aligned} f_i(X - u) + f_i(Y + u) &= \sum_{j \in X - u} v_{ij} + \sum_{j \in Y + u} v_{ij} \\ &= \left(\sum_{j \in X} v_{ij} - v_{iu} \right) + \left(\sum_{j \in Y} v_{ij} + v_{iu} \right) \\ &= \sum_{j \in X} v_{ij} + \sum_{j \in Y} v_{ij} = f_i(X) + f_i(Y) \end{aligned}$$

(c) symmetric concave valuation $f_i(X) = \varphi(|X|)$, φ は凹関数

凹関数の性質「 $\alpha < \beta$ ならば $\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) \leq \varphi(\alpha + 1) + \varphi(\beta - 1)$ 」を使う

(d) unit-demand valuation $f_i(X) = \max_{j \in X} v_{ij}$

場合分けを使って証明できる

演習問題 (再掲)

問題4: オークション参加者全員の効用関数が下記のクラスに属するとき、競争均衡が存在することを証明せよ。

(a) additive valuation

v_{ij} = 参加者 i の商品 j への満足度 とおく (簡単のため, 全ての値が異なると仮定)

$X_i = \left\{ j \in N \mid v_{ij} = \max_{1 \leq i' \leq m} v_{i'j} \right\}$, $p_j = \max_{1 \leq i' \leq m} v_{i'j}$ とおくと,

$\{X_1, \dots, X_m\}, (p_1, \dots, p_n)$ は競争均衡

(b) single-minded valuation は additive valuation の特殊ケースなので省略

(c) symmetric concave valuation

(d) unit-demand valuation

後日 (もしくは「数理経済学」にて) 証明

粗代替性, 単改良性, M^H 凹性

- 効用関数 $f: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ に対し,
粗代替性 $\zeta \Rightarrow$ 単改良性 $\zeta \Rightarrow M^H$ 凹性
- 等価な条件ではあるが, ある主張を示す際の「使いやすさ」では
 M^H 凹性がよい. 粗代替性は使いにくい
- 実際, 「 M^H 凹性 $\Rightarrow$ 単改良性」 「 M^H 凹性 $\Rightarrow$ 粗代替性」
「単改良性 $\Rightarrow$ 粗代替性」は (比較的) 証明しやすいが, 逆は難しい

M₁凹性 è 単改良性の証明

$p \in \mathbb{R}^N$, $X \subseteq N$, $X \notin D_i(p)$ とする.

単改良性の (i), (ii), または (iii) が成り立つことを示す.

要素数 $|X \setminus Y| + |Y \setminus X|$ 最小の $Y \in D_i(p)$ を選ぶ.

$X \neq Y$ なので, $X \setminus Y \neq \emptyset$ または $Y \setminus X \neq \emptyset$

(Case 1) $X \setminus Y \neq \emptyset$

$u \in X \setminus Y$ とすると, M₁凹性より $f(X) + f(Y) \leq f(X - u) + f(Y + u)$

または $\exists v \in Y \setminus X$ s.t. $f(X) + f(Y) \leq f(X - u + v) + f(Y + u - v)$

後者の場合を考える (前者も同様). $Y' = Y + u - v$ とおく.

$p(X) + p(Y) = p(X - u + v) + p(Y')$ より,

(A) $f(X) - p(X) + f(Y) - p(Y) \leq f(X - u + v) - p(X - u + v) + f(Y') - p(Y')$

$|X \setminus Y'| + |Y' \setminus X| < |X \setminus Y| + |Y \setminus X|$ より, $Y' \notin D_i(p)$

$\therefore f(Y') - p(Y') < f(Y) - p(Y)$

式(A) と合わせて, $f(X) - p(X) < f(X - u + v) - p(X - u + v)$

$\therefore$ 単改良性の (iii) 成立

(Case 2) $Y \setminus X \neq \emptyset$ はCase 1と同様に証明できるので省略

M凹性 è 粗代替性の証明

$p \in \mathbb{R}^N$, $q = p + \lambda e_j$, $X \in D_i(p)$ とする.

「 $\exists Y \in D_i(q)$ s.t. $X \setminus \{j\} \subseteq Y$ 」を示す.

(Case 1) $X \in D_i(q)$ è $Y=X$ とおけばよい

(Case 2) $X \notin D_i(q)$

任意の $Y \subseteq N$ に対し, $j \in Y$ è $f_i(Y) - q(Y) < f_i(Y) - p(Y)$

$j \notin Y$ è $f_i(Y) - q(Y) = f_i(Y) - p(Y)$

$X \in D_i(p)$, $X \notin D_i(q)$ より $j \in X$

要素数 $|X \setminus Y| + |Y \setminus X|$ 最小の $Y \in D_i(q)$ を選ぶ.

$X \setminus \{j\} \subseteq Y$ が成り立たないと仮定し, 矛盾を導く.

仮定より, $\exists u \in X \setminus Y, u \neq j$

M凹性より, $f_i(X) + f_i(Y) \leq f_i(X - u) + f_i(Y + u)$

または $\exists v \in Y \setminus X$ s.t. $f_i(X) + f_i(Y) \leq f_i(X - u + v) + f_i(Y + u - v)$

後者の場合を考える (前者も同様). $Y' = Y + u - v$ とおく.

$q(X) + q(Y) = q(X - u + v) + q(Y')$ より,

(A) $f_i(X) - q(X) + f_i(Y) - q(Y) \leq f_i(X - u + v) - q(X - u + v) + f_i(Y') - q(Y')$

$|X \setminus Y'| + |Y' \setminus X| < |X \setminus Y| + |Y \setminus X|$ より, $Y' \notin D_i(q)$

$\therefore f_i(Y') - q(Y') < f_i(Y) - q(Y)$

式(A) と合わせて, $f_i(X) - q(X) < f_i(X - u + v) - q(X - u + v)$

$j \in X, u \neq j$ なので $f_i(X) - p(X) = f_i(X) - q(X) + \lambda < f_i(X - u + v) - q(X - u + v) + \lambda$
 $= f_i(X - u + v) - p(X - u + v)$

これは $X \in D_i(p)$ に矛盾

単改良性 è 粗代替性の証明

$p \in \mathbb{R}^N$, $q = p + \lambda e_j$, $X \in D_i(p)$ とする. 「 $\exists Y \in D_i(q)$ s.t. $X \setminus \{j\} \subseteq Y$ 」を示す.

$\lambda^* = \max\{\lambda' \mid X \in D_i(p + \lambda' e_j)\}$ とおく.

$\lambda^* \geq \lambda$ の場合: $X \in D_i(p + \lambda e_j) \Rightarrow Y = X$ とすればよい.

$\lambda^* < \lambda$ の場合: $\exists Y' \in D_i(p + \lambda^* e_j)$ s.t. $j \in Y'$ (なぜか?)

十分に小さい $\epsilon > 0$ に対して, $X \notin D_i(p + (\lambda^* + \epsilon)e_j)$

(SWGS)より, $Y \equiv X - j \in D_i(p + (\lambda^* + \epsilon)e_j)$

または $Y \equiv X - j + v \in D_i(p + (\lambda^* + \epsilon)e_j)$ ($\exists v \in N - X$)

$\lambda^* + \epsilon < \lambda$ なので, $Y \in D_i(p + \lambda e_j)$ 成立 (なぜか?)

この Y は $X \setminus \{j\} \subseteq Y$ を満たす.

今日のレポート課題

- 問題2, 単改良性を使って計算
- 問題4 (a) の証明の続き
- 問題5 (c), (d), M_H 凹性を使って証明
- 問題6: 「 M_H 凹性 $\Rightarrow$ 単改良性の証明」の(Case 2) の証明
- 問題7: スライド6の効用関数が, M_H 凹性を満たさないことを証明せよ.