

経済学特講II 第2回

競争均衡の計算のための
繰り返しオークションの数理
---離散凸解析の視点からの理解---

塩浦昭義

今日の内容

- オークションのモデル
- 効用関数と関連する概念
- 粗代替性

1つの財のオークション

- Ascending オークション (English オークション)
 - 価格を徐々に (1単位ずつ) 上げる
 - 購入可能なオークション参加者が1人になったら終了



オークションのモデル

- 商品 (財, good) の集合 $N = \{1, \dots, n\}$
 - 各商品の個数は1と限定
- m 人の参加者 (入札者, bidder) で商品を分け合う
- 参加者 $i = 1, \dots, m$ の効用関数 (valuation fn) $f_i: 2^N \rightarrow \mathbb{Z}_+$

$2^N = N$ の
部分集合
全てを集めた
もの

$f_i(X)$ = 商品セット X
の満足度
(単位: お金)

効用関数の具体例

Aさん: を含む商品セットは100, それ以外は0 (single-minded)

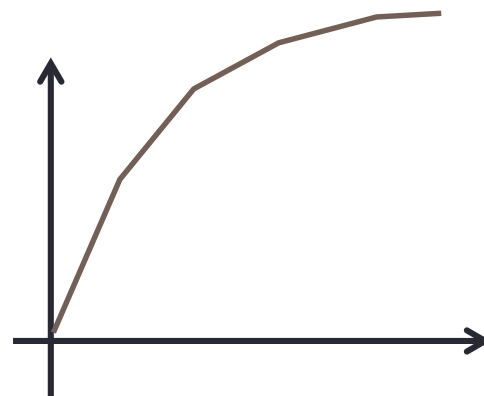
Bさん: 重み和 (:50, :70, :40, :30, :100) (additive)

Cさん: 商品数依存 (symmetric & concave)

(1つ:100, 2つ:180, 3つ:240, 4つ:280, 5つ:300)

Dさん: 商品セット (:50, :70, :40, :30, :100) の中の
一番良い商品にのみ依存 (unit-demand)

{ , , } è 満足度70, { , , } è 満足度100



効用関数の例

- **single-minded valuation**: 特定の商品 j とその価値 v を用いて,

$$f(X) = \begin{cases} v & (v \in X) \\ 0 & (v \notin X) \end{cases}$$

- **additive valuation**: 各商品 j の価値 v_j を用いて

$$f(X) = \sum_{j \in X} v_j$$

- **symmetric valuation**: 単調非減少関数 $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて,

$$f(X) = \varphi(|X|)$$

(φ が concave な場合 è **symmetric concave valuation**)

- **unit-demand valuation**: 各商品 j の価値 v_j を用いて

$$f(X) = \max_{j \in X} v_j \quad (\text{ただし } f(\emptyset) = 0)$$

- demand が k 個のバージョン:

$$f(X) = \{v_j | j \in X\} \text{ の大きい方から } \min\{k, |X|\} \text{ 個の和}$$

割当効用関数

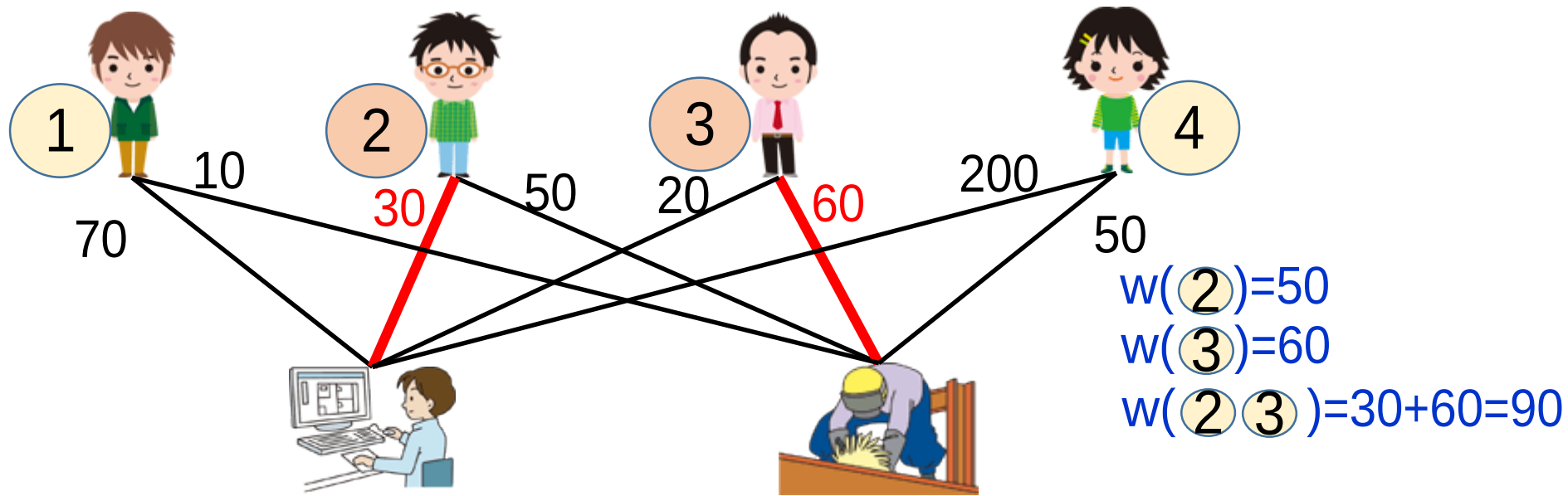
- **assignment valuation**: 最大重みマッチングで定まる効用関数
イメージーある工場の就職担当が,

k人の労働者(「商品」)を雇って, k個の仕事に割り当てたい

v_{jh} = 労働者 j を仕事 $h=1,2,\dots,k$ に割り当てたときの利益

$f(X)$ = 労働者 X を仕事 $1,2,\dots,k$ に割り当てたときの最大利益

$$= \max \left\{ \sum_{(j,h) \in M} v_{jh} \mid M: \text{マッチング}, \partial M \cap N = X \right\}$$



より複雑な効用関数の例

商品集合 N が幾つかの (互いに素な)

グループ $N_1, N_2, \dots, N_s$ に分割可能な場合

- 各グループの中から高々 1 つ取得可能

$$f(X) = \sum_{g=1}^t \max_{j_g \in X \cap N_g} v_{j_g}$$

1 を正整数 b_g に置き換え
ても可

$$= \max \{ \sum_{j \in Y} v_j \mid Y \subseteq X, |Y \cap N_g| \leq 1 \ (g = 1, \dots, s) \}$$

- 各グループの商品数に依存: $\varphi_g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて,

$$f(X) = \sum_{g=1}^s \varphi_g(|X \cap N_g|)$$

間接効用関数と需要集合

- 財の価格ベクトル $p \in \mathbb{R}_+^n$
- 定義: 間接効用関数 $V_i: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$
 - $V_i(p) = \max\{f_i(X) - \sum_{j \in X} p_j \mid X \subseteq N\}$
- 定義: 需要集合 $D_i(p) \subseteq 2^N$
 - $D_i(p) = \arg \max\{f_i(X) - \sum_{j \in X} p_j \mid X \subseteq N\}$

価格 p の下で
最も欲しい
商品セット全体

例: $p = (60, 60, 60, 60, 60)$ のとき

Aさん: を含む商品セットは100, それ以外は0

$$\text{è } V_A(p) = 40, D_A(p) = \{ \{1\} \}$$

Bさん: 重み和 (:50, :70, :40, :30, :100)

$$\text{è } V_B(p) = 50, D_B(p) = \{ \{2, 5\} \}$$

Cさん: 商品数依存 (1つ:100, 2つ:180, 3つ:240, 4つ:280, 5つ:300)

$$\text{è } V_C(p) = 60, D_C(p) = \{\text{商品数2または3}\}$$

競争均衡

- 財の価格ベクトル $p \in \mathbb{R}_+^n$
- 定義: 需要集合 $D_i(p) \subseteq 2^N$
 - $D_i(p) = \arg \max \{f_i(X) - \sum_{j \in X} p_j \mid X \subseteq N\}$
- 定義: 価格ベクトル p^* と N の分割 $(X_1, \dots, X_m)$ の組は

競争均衡 (ワルラス均衡)

p^* は均衡価格

$$\zeta \ni X_i \in D_i(p^*) \quad (i = 1, \dots, m)$$

価格 p^* の下で
皆が最良の
商品セット

例: $p = (60, 60, 60, 60, 60)$ のとき

- Aさん: $D_A(p) = \{ \{1\} \}$
- Bさん: $D_B(p) = \{ \{2, 5\} \}$
- Cさん: $D_C(p) = \{ \text{商品数 2 または 3} \}$

è p と分割 $\{ \{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4\} \}$ は競争均衡

競争均衡の性質

命題:

価格ベクトル p^* と N の分割 $(X_1, \dots, X_m)$ の組は競争均衡と仮定

(i) $\sum_{i=1}^m f_i(X_i) = \max \{ \sum_{i=1}^m f_i(Y_i) \mid (Y_1, \dots, Y_m) \text{ は } N \text{ の分割} \}$

(ii) 上記式の右辺の最適解 $(Y_1^*, \dots, Y_m^*)$ に対し, p^* と $(Y_1^*, \dots, Y_m^*)$ の組は競争均衡

è 効用関数が陽に与えられている場合,

次の手順で均衡の計算ができる

(1) $\sum_{i=1}^m f_i(X_i)$ を最大にする財の分割 $(X_1, \dots, X_m)$ を計算

(2) $X_i \in D_i(p^*)$ ($i = 1, \dots, m$) を満たす価格 p^* を計算

命題(i) の証明: N の任意の分割 $(Y_1, \dots, Y_m)$ に対し

$\sum_{i=1}^m f_i(X_i) \geq \sum_{i=1}^m f_i(Y_i)$ を証明すれば良い.

仮定より, 各 i について $f_i(X_i) - \sum_{j \in X_i} p_j \geq f_i(Y_i) - \sum_{j \in Y_i} p_j$

片々足すと, $\sum_{i=1}^m f_i(X_i) - \sum_{j \in N} p_j \geq \sum_{i=1}^m f_i(Y_i) - \sum_{j \in N} p_j$

命題(ii) の証明: 演習問題

効用関数の粗代替性

定理[Kelso-Crawford(1982), et al.] :

f_i は粗代替性を満たす $\Leftrightarrow$ 競争均衡が存在

粗代替性 ある商品が値上がりしたら ,
他の商品の欲しさが高まる

定義: 効用関数 $f_i: 2^N \rightarrow \mathbb{Z}_+$ は

粗代替性(gross-substitutes condition)を満たす

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{R}^N, q = p + \lambda e_j, \\ \forall X \in D_i(p), \exists Y \in D_i(q) \\ \text{s.t. } X \setminus \{j\} \subseteq Y \end{aligned}$$

これまでに出てきた効用関数は
すべて粗代替性を満たす

演習問題

問題1: 商品1つ (a とおく), 参加者5人, 各々の参加者の, 商品に対する評価値:

$$v_{1a} = 33, v_{2a} = 5, v_{3a} = 20, v_{4a} = 100, v_{5a} = 30$$

(1-a) 各参加者 i の効用関数 $f_i: \{\emptyset, \{a\}\} \rightarrow \mathbb{R}$ を具体的に書きなさい

(1-b) 各参加者 i の間接効用関数と需要集合を具体的に

(p に関する場合分けをして) 書きなさい

(1-c) 均衡価格の範囲を求めなさい

(ヒント: 競争均衡では, 商品 a を参加者4に割り当てる)

問題2: スライド9, 10の例を考える

(2-a) $\{1\} \in D_A(p)$ (商品1のみの集合が, 参加者Aにとってベスト) となるような価格 p すべてを計算せよ.

同様に, $\{2, 5\} \in D_B(p), \{3, 4\} \in D_C(p)$ となるような価格 p すべてを計算せよ.

(2-b) この例での均衡価格すべてを計算せよ.

問題3: スライド12の命題 (ii) を証明せよ.

演習問題

問題4：オークション参加者全員の効用関数が下記のクラスに属するとき，競争均衡が存在することを証明せよ．

- (a) additive valuation, (b) single-minded valuation
- (c) symmetric concave valuation

問題5：下記のクラスの効用関数が粗代替性を満たすことを証明せよ．

- (a) additive valuation, (b) single-minded valuation
 - (c) symmetric concave valuation, (d) unit-demand valuation
- (一般の場合の証明が難しい場合には，スライド5の具体例に対して証明せよ)

解いた演習問題は，次回の授業の際に
レポートとして提出してください