

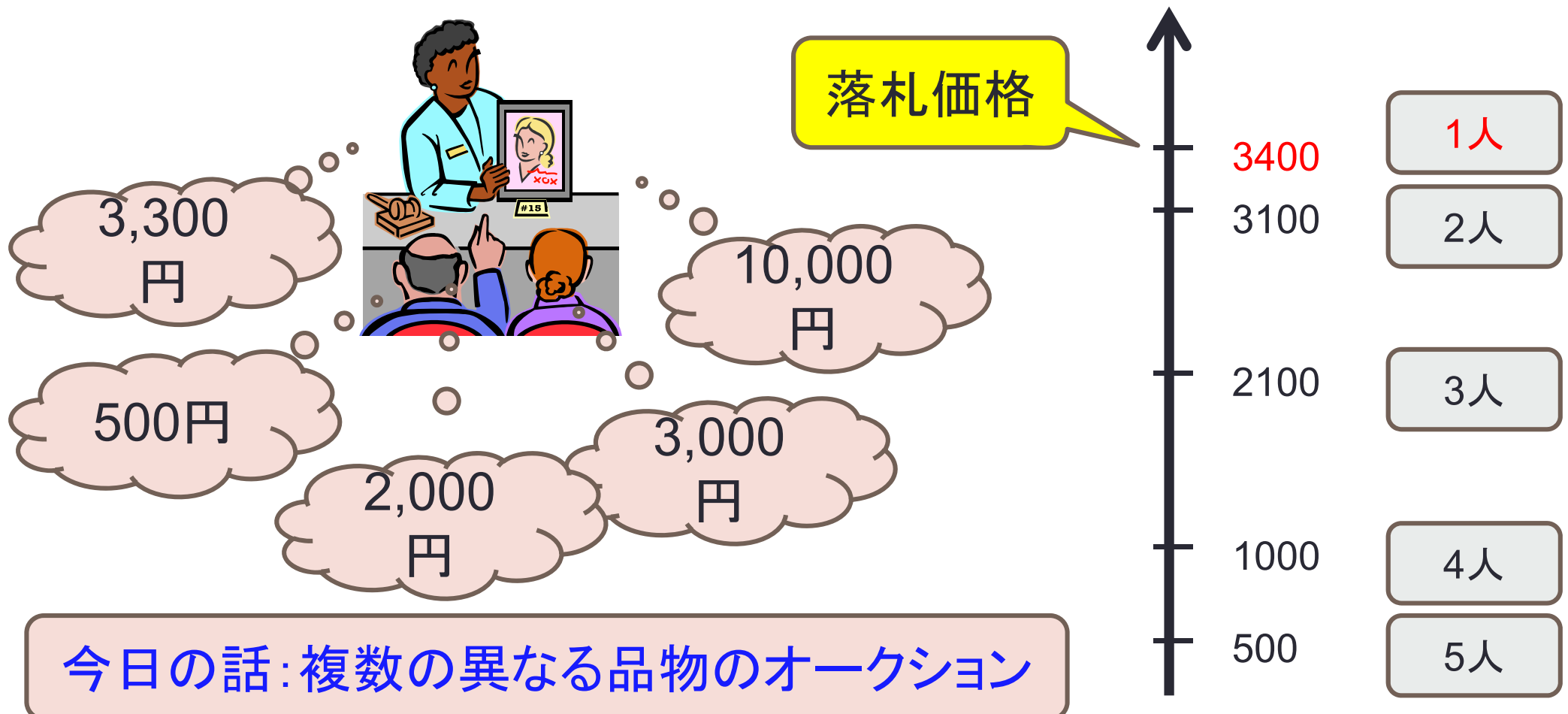
経済学特講II 第1回

競争均衡の計算のための
繰り返しオークションの数理
---離散凸解析の視点からの理解---

塩浦昭義

1つの財のオークション

- Ascending オークション (English オークション)
 - 価格を徐々に(1単位ずつ)上げる
 - 購入可能なオークション参加者が1人になったら終了



発表の概要

- Ausubel (2006)の複数財に対する Ascending Auction を
離散凸解析の視点から理解
 - 効用関数 の 粗代替性 = M 凹性
 - 間接効用関数 = L 凸関数 (共役性)
 - Lyapunov 関数 の最小化 = L 凸関数 の最小化
 - オークション = L 凸関数最小化アルゴリズム

主結果:

- 種々の型のオークションの提案
(English, Dutch, English-Dutch, Greedy)
- オークションの反復回数解析

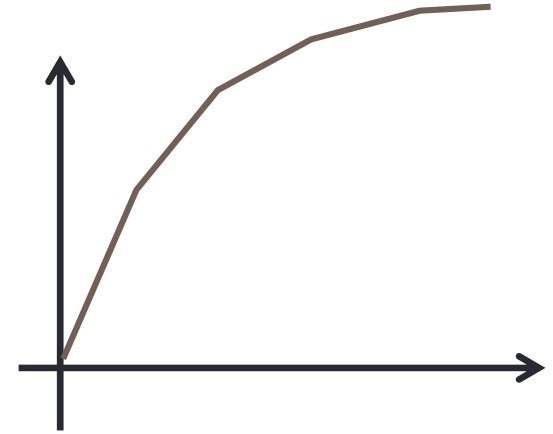
オークションのモデル

- 商品の集合 $N = \{1, \dots, n\}$
 - 各商品の個数は1と限定
- m 人の参加者(bidder)で商品を分け合う
- 参加者 $i = 1, \dots, m$ の効用関数 $f_i: 2^N \rightarrow \mathbb{Z}_+$

$f_i(X)$ = 商品セット X
の満足度
(単位: お金)

効用関数の例

① ② ③ ④ ⑤



- ①を含む商品セットは100, それ以外は0 (single-minded)
- 重み和(①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100) (additive)
- 商品セット(①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100) の中の一番良い商品にのみ依存 (unit-demand)
 {①, ②, ③}→満足度70, {③, ④, ⑤}→満足度100
- 商品数依存 (symmetric & concave)
 (1つ:100, 2つ:180, 3つ:240, 4つ:280, 5つ:300)

間接効用関数と需要集合

- 財の価格ベクトル $p \in \mathbb{R}_+^n$
- 定義: 間接効用関数 $V_i: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$
 - $V_i(p) = \max\{f_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$
- 定義: 需要集合 $D_i(p) \subseteq 2^N$
 - $D_i(p) = \arg \max\{f_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$

価格 p の下で
最も欲しい
商品セット全体

例: $p = (60, 60, 60, 60, 60)$ のとき

- Aさん: ①を含む商品セットは100, それ以外は0
 $\rightarrow V_A(p) = 40, D_A(p) = \{ \{1\} \}$
- Bさん: 重み和(①: 50, ②: 70, ③: 40, ④: 30, ⑤: 100)
 $\rightarrow V_B(p) = 50, D_B(p) = \{ \{2, 5\} \}$
- Cさん: 商品数依存(1つ: 100, 2つ: 180, 3つ: 240, 4つ: 280, 5つ: 300)
 $\rightarrow V_C(p) = 60, D_C(p) = \{\text{商品数2または3}\}$

競争均衡

- 財の価格ベクトル $p \in \mathbb{R}_+^n$
- 定義: 需要集合 $D_i(p) \subseteq 2^N$
 - $D_i(p) = \arg \max \{f_i(X) - \sum_{j \in X} p(j) \mid X \subseteq N\}$

価格 p の下で
最も欲しい
商品セット全体

- 定義: 価格ベクトル p^* と N の分割 $(X_1, \dots, X_m)$ の組は競争均衡

$$\longleftrightarrow X_i \in D_i(p^*) \quad (i = 1, \dots, m)$$

p^* は均衡価格

価格 p^* の下で
皆が最良の
商品セット

例: $p = (60, 60, 60, 60, 60)$ のとき

- Aさん: $D_A(p) = \{ \{1\} \}$
- Bさん: $D_B(p) = \{ \{2, 5\} \}$
- Cさん: $D_C(p) = \{ \text{商品数2または3} \}$

$\rightarrow p$ と分割 $\{ \{1\}, \{2, 5\}, \{3, 4\} \}$ は競争均衡

効用関数の粗代替性

定理[Kelso-Crawford(1982), et al.]:

f_i は粗代替性を満たす $\rightarrow$ 競争均衡が存在

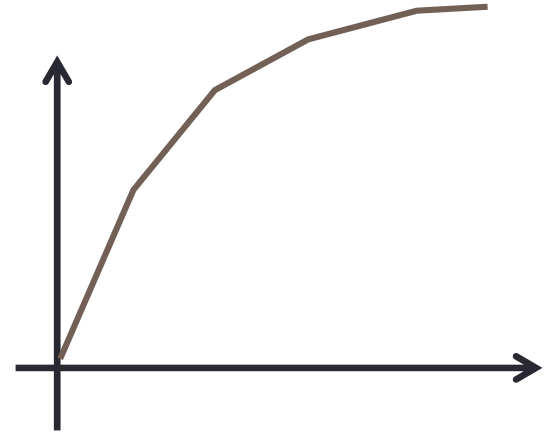
粗代替性 $\equiv$ iPad が値上がりしたら, 他の商品の欲しさが高まる

- 定義: 効用関数 $f_i: 2^N \rightarrow \mathbb{Z}_+$ は
粗代替性(gross-substitutes property)を満たす

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{R}^N, \quad q = p + \lambda e_j, \\ \forall X \in D_i(p), \quad \exists Y \in D_i(q) \\ \text{s.t.} \quad X \setminus \{j\} \subseteq Y \end{aligned}$$

$$D_i(p) \equiv \arg \max \{f_i(S) - \sum_{i \in S} p_i \mid S \subseteq N\}$$

粗代替性を満たす効用関数の例



- ①を含む商品セットは100, それ以外は0 (single-minded)
- 重み和(①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100) (additive)
- 商品セット(①:50, ②:70, ③:40, ④:30, ⑤:100) の中の
一番良い商品にのみ依存 (unit-demand)
 {①, ②, ③}→満足度70, {③, ④, ⑤}→満足度100
- 商品数依存 (symmetric & concave)
 (1つ:100, 2つ:180, 3つ:240, 4つ:280, 5つ:300)

繰り返しオークション

- 繰り返しオークション (iterative auction):
 - 均衡価格 (および財配分) を求めるアルゴリズム (メカニズム)
 - 入札者の情報を元に、価格を繰り返し更新
-

Step 0. 競売人は、初期価格 $p = (p_1, \dots, p_n)$ を設定

Step 1. 各入札者は、需要集合 $D_i(p)$ を申告

Step 2. 競売人は $S_i^* \in D_i(p)$ を満たす

財の分割 $(S_1^*, S_2^*, \dots, S_m^*)$ の存在をチェック

存在 $\rightarrow$ 終了 (p は均衡価格)

Step 3. 価格 p を更新, Step 1 $\rightarrow$

- 競り上げオークション (ascending auction): p が単調増加

リアプノフ関数

Ausubel (2006)

リアプノフ関数: $L(p) = p(N) + \sum_i V_i(p)$

間接効用関数 $V_i(p) = \max\{f_i(X) - p(X) | X \subseteq N\}$

命題: (i) L は劣モジュラ関数
(ii) $p : L$ の最小解 $\longleftrightarrow p$: 均衡価格
(iii) $\exists L$ の整数最小解

繰り返しオークション

= リアプノフ関数の最小化アルゴリズム

リアプノフ関数

Ausubel (2006)

リアプノフ関数: $L(p) = p(N) + \sum_i V_i(p)$

間接効用関数 $V_i(p) = \max\{f_i(X) - p(X) | X \subseteq N\}$

命題: (i) L は劣モジュラ関数
 (ii) $p : L$ の最小解 $\leftrightarrow p$: 均衡価格
 (iii) $\exists L$ の整数最小解

競り上げオークション ※ Gul-Stacchetti (2000) の書き換え

Step 0: $p :=$ 十分小さい価格ベクトル (例: $\mathbf{0}$)

Step 1: $L(p + d)$ を最小にする $d = d_* \in \{0, +1\}^n$ を計算

Step 2: $L(p + d_*) \geq L(p) \rightarrow$ 終了 (p は均衡価格)

Step 3: $p := p + d_*,$ Step 1 $\rightarrow$

オークション理論と離散凸解析の繋がり

定理:

[Kelso-Crawford (1982), et al.]

f_i : 粗代替性 $\rightarrow$ ワルラス均衡価格が存在

• 定義: $f_i: 2^N \rightarrow \mathbb{Z}_+$ は粗代替性(gross-substitutes) を満たす

$\leftrightarrow \forall p \in \mathbb{R}^n, \quad q = p + \lambda e_j,$

$\forall X \in D_i(p), \quad \exists Y \in D_i(q): X \setminus \{j\} \subseteq Y$

$$D_i(p) \equiv \arg \max \{ f_i(S) - \sum_{i \in S} p_i \mid S \subseteq N \}$$

定理: [藤重-Yang (2003)]

f_i : 粗代替性 $\leftrightarrow$ M_h凹性

$\rightarrow$ 離散凸解析との繋がり

離散凸解析 (Murota 1998)

2種類の離散凸性:

$M_{\square}$ 凸 / $L_{\square}$ 凸

離散ルジャンドル変換による共役性

$M_{\square}$ 凸 / $L_{\square}$ 凸関数の最小化アルゴリズム

発表の概要

- Ausubel (2006)の複数財に対する Ascending Auction を
離散凸解析の視点から理解
 - 効用関数 の 粗代替性 = $M^{\sharp}$ 凹性
 - 間接効用関数 = $L^{\sharp}$ 凸関数 (共役性)
 - Lyapunov 関数 の最小化 = $L^{\sharp}$ 凸関数 の最小化
 - オークション = $L^{\sharp}$ 凸関数最小化アルゴリズム

主結果:

- 種々の型のオークションの提案
(English, Dutch, English-Dutch, Greedy)
- オークションの反復回数解析

$M^\sharp$ 凹関数の定義

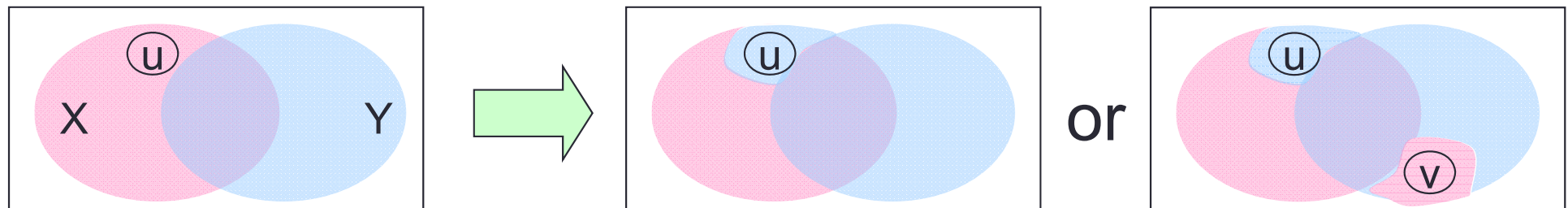
(Murota-Shioura 99)

定義: $f: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ は $M^\sharp$ 凹 (えむ なちゅらる) $\iff$

$\forall X, Y \subseteq N, \forall u \in X \setminus Y:$

(i) $f(X) + f(Y) \leq f(X - u) + f(Y + u),$ or

(ii) $\exists v \in Y \setminus X: f(X) + f(Y) \leq f(X - u + v) + f(Y + u - v)$



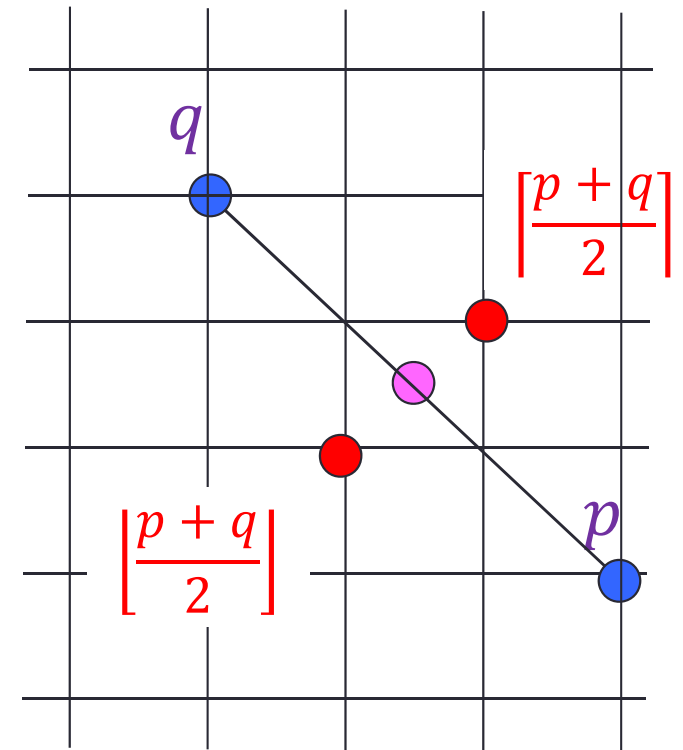
L₁凸関数

命題: 連続関数 $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数

$\iff$ 中点凸性: $\forall p, q \in \mathbb{R}^n, g(p) + g(q) \geq 2g\left(\frac{p+q}{2}\right)$

定義: $g: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ はL₁凸関数

$\iff$ 離散中点凸性: $\forall p, q \in \mathbb{Z}^n,$
 $g(p) + g(q)$
 $\geq g\left(\left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil\right) + g\left(\left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor\right)$



リアプノフ関数

Ausubel (2006)

リアプノフ関数: $L(p) = p(N) + \sum_i V_i(p)$

間接効用関数 $V_i(p) = \max\{f_i(X) - p(X) | X \subseteq N\}$

命題: (i) L は劣モジュラ関数
 (ii) $p : L$ の最小解 $\leftrightarrow p$: 均衡価格
 (iii) $\exists L$ の整数最小解

競り上げオークション ※ Gul-Stacchetti (2000) の書き換え

Step 0: $p :=$ 十分小さい価格ベクトル (例: $\mathbf{0}$)

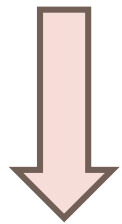
Step 1: $L(p + d)$ を最小にする $d = d_* \in \{0, +1\}^n$ を計算

Step 2: $L(p + d_*) \geq L(p) \rightarrow$ 終了 (p は均衡価格)

Step 3: $p := p + d_*,$ Step 1 $\rightarrow$

競り上げオークションの解析

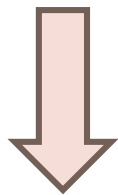
定理: f_i : 粗代替性 $\leftrightarrow$ M_H凹性 [藤重-Yang (2003)]



離散凸共役性定理 (室田1998)

定理: リアプノフ関数 = L_H凸関数 [室田-塩浦-Yang (2013)]

考察: 競り上げオークション
= L_H凸関数最小化の増加型最急降下法



最急降下法の反復回数の解析結果

系: $\min \left\{ \|p^* - p_0\|_\infty \mid p^*: \text{整数均衡}, p^* \geq p_0 \right\}$

その他のオークションアルゴリズム

- Ascending Auction (English)
- Descending Auction (Dutch)
- Greedy Auction
- Two-Phase Auction (English-Dutch)

離散凸解析から見た繰り返しオークション

- 競り上げオークション (Ausubel 2006) = 増加型最急降下法
- 競り下げオークション (Ausubel 2006) = 減少型最急降下法
 - 利点: 価格変化の単調性
 - 欠点: 初期価格を十分小さく・大きくする必要性 → 反復回数 大
- 貪欲オークション (室田-塩浦-Yang 2013) ← 最急降下法
 - 利点: 任意の初期価格が利用可
少ない反復回数, = 均衡価格ベクトルへの最短「距離」
 - 欠点: 価格の上下動
- 二段階オークション (室田-塩浦-Yang 2013)
 - 競り上げ → 競り下げ
 - 利点: 任意の初期価格が利用可
価格変化がほぼ単調
 - 欠点: 反復回数がやや多い

貪欲オークション

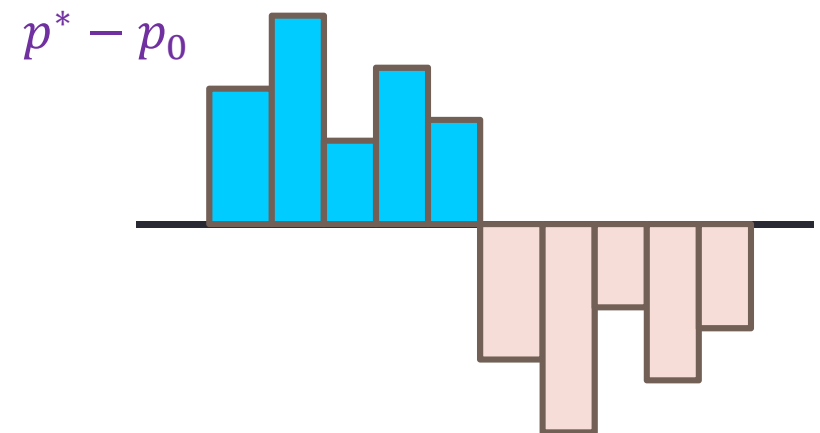
Step 0: $p :=$ 任意の整数ベクトル

Step 1: $L(p + \sigma e_X)$ を最小にする $\sigma \in \{+1, -1\}$, $X \subseteq N$ を計算

Step 2: $L(p + \sigma e_X) \geq L(p) \rightarrow$ 終了 (p は均衡)

Step 3: $p := p + \sigma e_X$, Step 1 $\rightarrow$

定理: 反復回数 $= \min \left\{ \|p^* - p_0\|_{\infty}^+ + \|p^* - p_0\|_{\infty}^- \mid p^*: \text{整数均衡} \right\}$
 $\|p^* - p_0\|_{\infty}^+ = \max\{0, \max(p^*(i) - p_0(i) \mid i \in N)\}$



二段階オークション

競り上げ + 競り下げ

Step 0: $p :=$ 任意の初期価格ベクトル

Step A1: $L(p + d_*)$ を最小にする $d_* \in \{0, +1\}^n$ を計算

Step A2: $L(p + d_*) \geq L(p) \rightarrow$ Step D1 $\wedge$

Step A3: $p := p + d_*$, Step A1 $\wedge$

Step D1: $L(p + d_*)$ を最小にする $d_* \in \{0, -1\}^n$ を計算

Step D2: $L(p + d_*) \geq L(p) \rightarrow$ 終了 (p は均衡価格)

Step D3: $p := p - e_y$, Step D1 $\wedge$

定理: 反復回数

$\leq$ (均衡価格ベクトルへの最短「距離」) $\times 3$