

5 類 a 組 物理学 A

4/21 講義 補足資料

竹内一将*

2015 年 4 月 21 日

定数係数、斉次の線形常微分方程式において、特性方程式が重根を持つ場合の解き方

斉次の微分方程式

$$\left(\frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} + \cdots + a_n \right) x(t) = 0 \quad (1)$$

に対する特性方程式は

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \quad (2)$$

である ($\frac{d}{dt}$ を λ で置き換えれば良い)。この解を $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とし、重根がないものとする。式 (1) の一般解は

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} \quad (3)$$

で与えられる。

ここでは、 λ の解に重根が含まれる場合を考えよう。 $\lambda = \lambda_0$ が式 (2) の k 重根 (つまり $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \lambda_0$) だとし、他には重根がないものとする。すなわち、式 (2) は

$$(\lambda - \lambda_0)^k (\lambda - \lambda_{k+1}) (\lambda - \lambda_{k+2}) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0 \quad (4)$$

と書き換えられる。ここで、重根がない時と同様、

$$x(t) = C_0 e^{\lambda_0 t} + C_{k+1} e^{\lambda_{k+1} t} + C_{k+2} e^{\lambda_{k+2} t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} \quad (5)$$

は式 (1) の解であるが、本来 n 個あるはずの積分定数が $n - k + 1$ 個しかないので、式 (5) は式 (1) の一般解ではない。すなわち、式 (5) に含まれていない項がまだ残っているはずなので、それが何なのか考えてみる。

特性方程式が、 $\frac{d}{dt}$ を λ と置き換えて得られたことを思い出すと、特性方程式が式 (4) のように書けたということは、もとの微分方程式 (1) は

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_0 \right)^k \left(\frac{d}{dt} - \lambda_{k+1} \right) \left(\frac{d}{dt} - \lambda_{k+2} \right) \cdots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_n \right) x(t) = 0 \quad (6)$$

と書き換えられる。ここで、微分演算子 $\frac{d}{dt}$ と定数 λ_m ($m = 0, k+1, k+2, \dots, n$) が可換である (すなわち $\frac{d}{dt} \lambda_m = \lambda_m \frac{d}{dt}$) ことに注意すると、 $(\frac{d}{dt} - \lambda_m)$ という項の順番を入れ替えても良いことに気付く。すなわち、条件 $(\frac{d}{dt} - \lambda_m)x(t) = 0$ ($m = k+1, k+2, \dots, n$) か $(\frac{d}{dt} - \lambda_0)^k x(t) = 0$ のいずれかが満たされれば、式 (6) は満たされることになる。

*mail : kat@kaztake.org

さて、式 (5) で足りなかった項は、明らかに重根に起因すると考えられるので、試しに

$$x(t) = A(t)e^{\lambda_0 t} \quad (7)$$

と置いて、 $A(t)$ が従う微分方程式を考えてみよう。

もし、 $(\frac{d}{dt} - \lambda_m)x(t) = 0$ ($m = k+1, k+2, \dots, n$) であるならば、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_m\right)x(t) &= \left(\frac{d}{dt} - \lambda_m\right)A(t)e^{\lambda_0 t} \\ &= \frac{dA}{dt}e^{\lambda_0 t} + A\lambda_0 e^{\lambda_0 t} - \lambda_m A e^{\lambda_0 t} \\ &= \left[\frac{dA}{dt} + (\lambda_0 - \lambda_m)A\right]e^{\lambda_0 t} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

であるから、 $\frac{dA}{dt} + (\lambda_0 - \lambda_m)A = 0$ であり、この解は $A(t) = C_m e^{(\lambda_m - \lambda_0)t}$ である。すなわち、 $x(t) = A(t)e^{\lambda_0 t} = C_m e^{\lambda_m t}$ であり、これは既に式 (5) に含まれていた項にあたる。

では次に、 $(\frac{d}{dt} - \lambda_0)^k x(t) = 0$ の場合を考えてみよう。この時、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^k x(t) &= \left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^k A(t)e^{\lambda_0 t} \\ &= \left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^{k-1} \frac{dA}{dt} e^{\lambda_0 t} \\ &= \left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^{k-2} \frac{d^2 A}{dt^2} e^{\lambda_0 t} \\ &= \dots = \frac{d^k A}{dt^k} e^{\lambda_0 t} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

となる。すなわち、 $\frac{d^k A}{dt^k} = 0$ であり、この一般解は $A(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + \dots + C_k t^{k-1}$ であるから、 $x(t)$ に直すと、 $x(t) = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + \dots + C_k t^{k-1})e^{\lambda_0 t}$ となる。これは、第 1 項以外は式 (5) にはなかった項であり、ちょうど $k-1$ 個の新しい項が現れた。これと式 (5) に含まれていた $n-k+1$ 個の項を合わせると、ちょうど n 個の項と n 個の積分定数があるため、これが求めるべき一般解である。

以上により、特性方程式が $\lambda = \lambda_0$ という k 重根をもつ時の微分方程式 (1) の一般解は、

$$x(t) = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + \dots + C_k t^{k-1})e^{\lambda_0 t} + C_{k+1} e^{\lambda_{k+1} t} + C_{k+2} e^{\lambda_{k+2} t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \quad (10)$$

と表される。