

図 1.19: 2 つの温度でのボルツマン分布

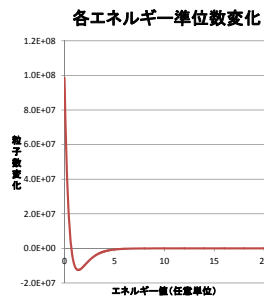


図 1.20: 2 つの温度でのボルツマン分布の差

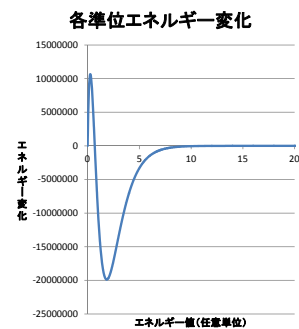


図 1.21: 2 つの温度でのエネルギー分布変化

先ほどと同じように、表計算ソフトを使って、振動のエネルギー $h\nu$ 単位でしか変化できないと比熱の温度依存性にどのような影響が出るかを検討してみよう。比熱は、微小な温度変化があった場合のエネルギー差に比例する量である。そこで、ある温度と、それから僅かに異なった温度でのエネルギー差を求めてみることにしよう。温度が変わると、ボルツマン分布に従って状態の分布が変化する。2 つの温度での差を取れば、個々のエネルギー状態の振動がどのように変化したかが見て取れる。温度を下げた場合には、低エネルギーの振動状が増え、高いエネルギーの振動状態の数が減っていることが分かる。振動状態の分布変化からエネルギー変化にするには、分布変化にそれぞれの振動状態のエネルギーを掛け合わせればよい。

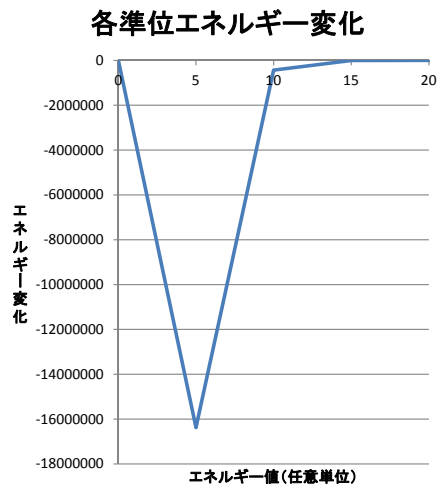
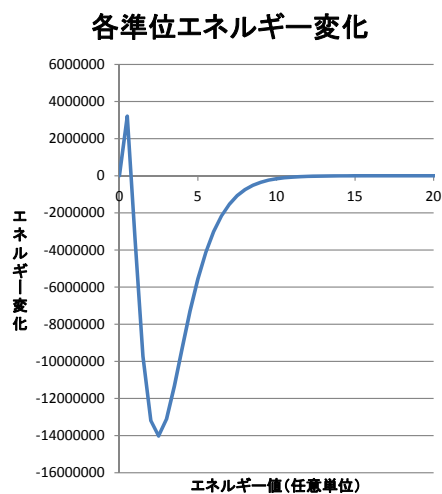
分布差のグラフに比べると、エネルギー分布変化のグラフは横軸に比例するエネルギーの値がかかっているために、高エネルギー側の比重が大きくなっている。このグラフの面積の総和を取れば温度変化による系のエネルギー変化が求められる。

温度が低下すると、 kT に比べて $h\nu$ が相対的に大きくなっていく。このため、温度変化に対して状態を変えられる粒子の数が減っていき、その結果として比熱は小さくなっていく^{26,27}。

現在では、 $E = h\nu$ という関係式は、全ての振動運動に対して成立するものであると理解されている。

²⁶ このモデルでは原子は独立に振動していて、振動数は同じであるとしている。

²⁷ 自由電子を含まない物質で低温で比熱が 0 になることは、この理論で説明できるが、金属のように自由電子がある物質では自由電子に由来する比熱 ($3kT/2$) が存在するはずだ。しかし、金属の比熱も低温では 0 に近づくし、室温付近でも $3R + 3R/2$ ではなく $3R$ 程度の値しか持たない。室温付近でも自由電子の運動が比熱に寄与していないということは、室温での自由電子の運動も古典的な物理学ではなく、量子力学で記述されなければならないことを意味している。金属で自由電子由来の比熱が観察されない理由は、この授業の範囲を超えていて、2 年生か 3 年生の固体物理学の話題となる。



図

1.22:

$h\nu/kt = 0.5$ の場合のエネルギー変化。ぎくしゃくしてくるが、まだ比熱には大きな影響はない。

図

1.23:

$h\nu/kt = 5$ の場合のエネルギー変化。比熱は連続している場合以下に低下する。

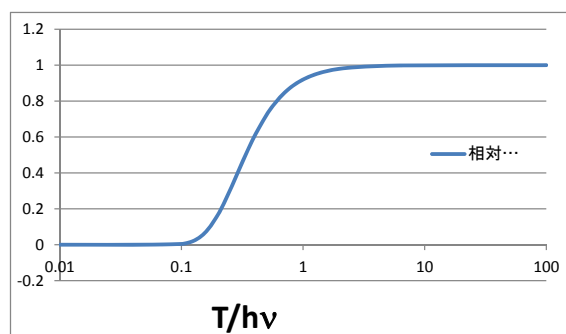


図 1.24: 比熱の $h\nu/kt$ 依存性

1.2.5 光電効果

ここまでの話は、黒体内の電磁波や固体の振動など、これまでは波として扱われてきたようなものが、ある単位でしかエネルギーの変化ができないもので、そういう意味では粒子的な側面を持っているという話であった。この話を、さらに先に進めて、粒子的からの的をとってしまったのが、光電効果に対するアインシュタインの説明である。

図 1.25: 光電管

図 1.25 の写真は光電管と呼ばれる真空管の一種で、内部に半円筒状と棒状の 2 本の電極がある。2 本の電極は接していないから普通に考えると外から二つの電極間に電圧を加えても電流は流れない。しかし、棒電極を正にした状態で、光を半円筒電極にあてると電流が観測される。光電管の半円筒状電極に光を照射すると電流が観測されるということは、光照射により電極から電子が放出されたことを意味している。光による電子放出なので光電効果と呼ばれている^{28,29}。

光電効果の特徴を調べるためには図 1.26 のような実験装置が必要になる。まず、光源として、波長と光強度が調整可能なものがある。実験室では適当な光源と分光器の組み合わせでセットアップすることが出来る。光電面となる電極と出てきた電子を集める収束電極を結ぶ回路に、電流計と電圧源がある。電流計により収束電極に到達した電子の数（に比例する値）が計測できる。そして、測定される電流量は電圧源により二つの電極間に加えられた電位差に依存する。

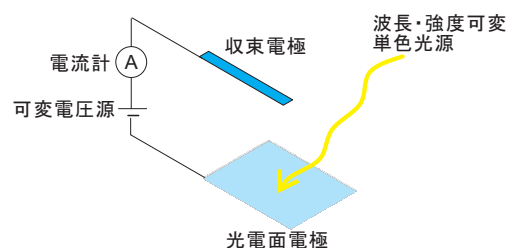


図 1.26: 光電効果の実験セットアップ

電子は負の電荷を持っているので、収束電極側を正にすれば電子は引き寄せられて電流は素直に流れる。これは、光電管を光センサーとして用いる時の標準的な電場のかけ方である。しかし、光電効果の実験の時には収束電極側を負にする。もし、光電面から放出される電子の初速度が 0 なら収束電極側を負にすると電流

²⁸電極からの電子放出には、この他に熱電子放出と電界による電子放出がある。

²⁹光電管は光センサーとして使われていたがその感度は高くはない。真空管の中に光により出てきた電子を増幅する機能を組み込んだものが光電子増倍管で、これはニュートリノで有名になったカミオカンデでも光検出器として使われている。また、それほどの感度を必要としない用途では、シリコンフォトダイオードなどの固体光検出素子が使われてるようになっている。

は一切観察されなくなる。しかし、実際には収束電極側を負にしても、電圧が低い時には電流が観測される。これは、光電面から放出された電子が有限の速度を持っていることを意味している。

光電効果の実験で、収束電極側を正にした状態で、照射光強度を変えていくと、図 1.27 のように、光電流が照射光強度に比例して増加する。この性質があるから、光電管や光電子増倍管を光検出器として使える。

ある波長の光を一定の照射強度で光電面に照射し、光電流を集める電極側にマイナスの電圧をかけていくと電子は電極に到達しにくくなり、ある電圧で光電流が見られなくなる（図 1.28）。この実験結果は、光電面から出て来る電子の初速度には分布があるが、ある最大値があって、それより早い速度の電子が出てきてはいないことを示している。この電圧を阻止電圧と呼ぶことにしよう。

阻止電圧の大きさは、照射する光の波長に依存する事が知られており、図 1.29 のように波長が長波長になるほど、阻止電圧はひくくなり、ついには、ある波長では 0V となってしまう。この閾値より長い波長の光では、収束電極に正の電圧をかけたところで、電流は観察されない。光電面から電子が放出されなくなってしまうのである。

光電効果に関する実験結果を簡単にまとめると、

- 電子の放出が起こるためには、あてる光がある波長より短波長でなければならない。それより長波長の光はどんなにつよくても電流は観察されないし、短波長なら弱くても電流が観察される。
- 閾値より短波長の光を当てた時に出てくる電子の量は、当てた光の強度に比例する。
- 閾値より短波長の光をあてた時に出てくる電子の、運動エネルギーの最大値は、照射した光の波長の逆数と線形な関係がある。

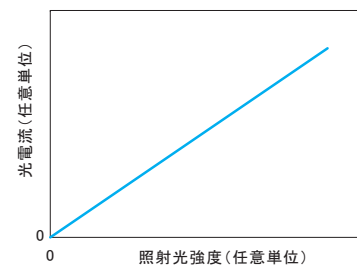


図 1.27: 光電流の強度依存性電場依存性

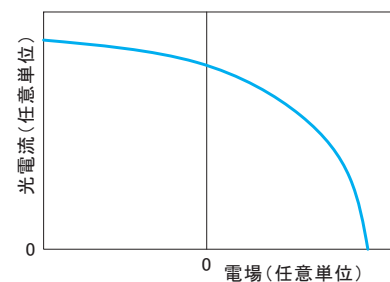


図 1.28: 光電流の電場依存性

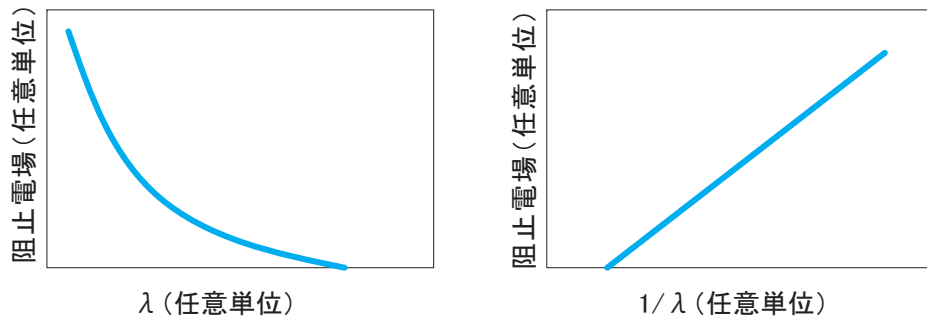


図 1.29: 阻止電場の波長依存性

この現象を波動説に基づいて説明しようとする、いくつかの困難がある。波動もエネルギーを運べる物だけれど、電磁気学によると電磁波のエネルギーは

$$I = \frac{1}{2} n \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} |E_0|^2 \quad (1.6)$$

と、振幅 $|E_0|^2$ にのみ依存するので、長波長の光と短波長の光を区別する理由がない。もちろん、光電子が放出される場合の最大運動エネルギーと波長の関係も説明できない。実際、黒いもので光を吸収したときの温度上昇を見ると、波長によらず同じエネルギーを受ければ同じだけ温度があがる。この場合には光は波長によらず同様に振る舞うのである。また、波動は基本的に拡がった物だから電子のように小さいものを物質から放出するためには、エネルギーが集中しなければならないけれど、そのような機構を考えるのは困難である³⁰。

これに対して、アインシュタインは、光を $h\nu$ のエネルギーを持つ粒子と考えれば、光電効果の特徴が説明できると主張した。光の振動数が、300nm の紫外光の場合には、 $\nu = c/\lambda = 3 \times 10^8 / 300 \times 10^{-9} = 10^{15}$ 程度である。従って、光子1個のエネルギーは $6.6 \times 10^{-19} J$ 程度となる。一方、波長の長い600nmの光の持つエネルギーは300nmの光の半分で $3.3 \times 10^{-19} J$ 程度である。粒子1個あたりのエネルギーが異なると何が変わってくるかは、直径がほぼ同じで質量が異なる球体、例えばピンポン球とゴルフボールを頭に思い浮かべると理解しやすい。2種類の玉が同じ速度で飛翔していれば、その時の運動エネルギーはそれぞれの玉の質量に比例する。2つの玉が同じ速度でガラス板に衝突したとしよう。ピンポン球の方は、非常に多数の玉をガラスにぶつけてもガラス板が割れることは普通はない。玉の

³⁰ 同じ振幅なら振動数が高い方が、電子が電場の変化に追随するなら、電子の最大速度は速くなるであろうから、短波長で光が放出されるのは説明出来そうな印象を受けるかもしれないけれど、もし、光の電場による電子の最大速度が問題なら、低周波の波でも振幅を大きくすればいずれは条件を満たす状態が出現するはずである。

数が多ければ全エネルギーはいくらでも大きくなりうるけれども、それによってガラス板を割ることはできない。一方、ゴルフボールは、ただ1つだけでガラス板を割ることができる。粒子1個が持っているエネルギーによって発生する事象は質的に異なったものになる。

図 1.30: 光電効果の直感的な説明

光が当たると電子が飛び出して来る時に、決してすべての電子が、何かに邪魔されずにまっすぐ上に出て来るわけではない。それどころか、奥に走って行って出てこないものや、一端奥に行って何かにぶつかって出てくるものとかいろいろある。まっすぐでなかったものでは、衝突でエネルギーを失っているのだから、出てきた後はより低いエネルギー（速度）になっている。出てきた電子の運動量分布を測定すると、決して単一の値ではなく、ある最大値を持って分布する形になっているのである。これが光電効果の実験で収束電極が負になる電場を加えていくと電流値が減って、最終的にある電圧値で電流が流れなくなる理由である。照射する光の波長を変えると、電場に対する応答の傾向は似ているが、最終的な素子電場の値が変化する。その電圧が放出された電子の持っている最大の運動エネルギーに対応する。

アインシュタインは放出された電子の運動エネルギーの最大値と照射波長の関係として

$$E_{max} = h\nu - W \quad (1.7)$$

という式を提案した。ここで W は仕事関数と呼ばれ、金属毎に定まった値である³¹。この式は、非常に簡単なもので、光電効果の事を知っていたら誰でも思いつきそうなぐらいに感じるかもしれない。しかし、1905年にアインシュタインが光電効果の理論を発表した時には、上の式を推定できるようなきちんとした実験結果は存在していなかった。アインシュタインは実験結果からではなく頭の中から理論を作り上げたのである。これは、同じ年に発表された特殊相対性理論にも共通する特徴であろう。光電効果の式はだいぶ後になって米国の実験物理学者であるミリカンによって実証された。ちなみに、ミリカンがこの実験を行った動機は「アインシュタインの理論の間違いを実証するため」だったらしい。光量子の考えによれば、光のエネルギーは光量子のエネルギー×光量子の数となる。同じ波長で光が強ければ、それだけ光量子の数も多いので、たたき出される電子の数もそれに比例して増加する。

³¹ より正確には同じ金属でも結晶面の方位により仕事関数は微妙に異なっている。

仕事関数はイオン化傾向の高い金属ほど小さくなる。これは考えてみれば当たり前のことで、イオンになるということは金属から電子を抜き取ることであるか、イオンになりやすい金属では引き抜きに要するエネルギーも小さく、仕事関数も小さくなるのである。金属の仕事関数は、可視光から紫外光の範囲にある。

1個の光子のエネルギーは非常に小さいと感じられるだろうと思う。しかし、これは1個の値であり、アボガドロ数個程度集まりと結構な値になる。例えば300nmの光は $6.6 \times 10^{-19} \times 6.02 \times 10^{23} = 397 \text{ KJ}$ となる。これは化学結合のエネルギーに匹敵する値である³²。

ところで、光のエネルギーの単位として、Jではなく、電子ボルト(eV)という単位がよく用いられている。1電子ボルトは、電子の電荷を持った粒子を1Vの電位差に逆らってポテンシャルの高い方に行くのに必要なエネルギーで $1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ である。この表記を使えば、300nmの光のエネルギーは4.4eVとなる。eVは光電子デバイスを扱う時に非常に便利な単位である。例えば1eVの光は電子を1Vだけエネルギーの高い状態に持って行けるので、1eVの光を吸収した場合に電子に生じる最大の電位差は1Vであるとすぐに理解できる。

光電効果の理論により、光の波動性が否定されたのではないことには注意を払わなければならない。干渉や回折、偏光の存在など、光量子仮説では決して説明できず、波動論でしか説明できない現象も依然として存在する。その上で、光を粒子と考えなければ説明が出来ない現象の存在が示されたのである。つまり、光は波動性と粒子性を兼ね備えた物であるという具合に人類の認識が変化した。これを波動性と粒子性の二重性と呼ぶ。

人間の直感からは粒子と波動性は相容れないものである。あるものが粒子であって、かつ、波であるなどということは考えられないことである。しかし、微小な世界では、人間の直感は当てはまらない。電子も、光も粒子性と波動性を兼ね備えるという直感に反することを受け入れないと説明できないことが起こっているのである。

演習

1. 結合エネルギーから分解に必要な光の波長
2. 緑色発光のLEDの発光閾値電圧

³²そして、紫外線で有機物が劣化する理由もここから理解できる。空気中で有機物に紫外線をあてると電子が飛び出す代わりに結合が一旦切れ、それが他の分子や空気中の酸素と反応すると不可逆に別のものになってしまうのである

1.3 ふたたび粒子の波動性

歴史的な経緯としては、アインシュタインより光が粒子性をも有することが提唱されたことを受けて、逆に粒子としてしか考えられていなかったものが波動性を持つのではないかというアイデアが出てきた。このアイデアを出したのはフランスのドブロイである³³。もちろん、それまでの間に量子力学がまったく進歩していなかったわけではなく、ボーアの水素原子模型などそれまでの物理では理解できなかった現象を説明する理論はあったけれども、その物理的な背景というのは分からずに、いくつかのガイドラインに沿った経験的な議論が展開されているに過ぎなかった³⁴。

ドブロイは、アインシュタインの提出した

$$\begin{aligned} E &= h\nu \\ E &= mc^2 \end{aligned} \tag{1.8}$$

という2つの式を結びつけることを考えた³⁵。光子は質量を持たないと考えられているが、ドブロイは有限だけれどもほとんど0の質量を持っているとして議論を進めた。上の2つの式は何れもエネルギーに関する式なので、両方のエネルギーが等しいとする。すると

$$h\nu = mc^2 \tag{1.9}$$

この式の両辺を c で割ると

$$h\nu/c = h/\lambda = mc \tag{1.10}$$

ここで、 c は光の速度であるので、光の質量が小さくても有限の値なら、速度の質量 m をかけた物は光の運動量と考えて良い。よって、 mc を p と置き換えると

$$\lambda = h/p \tag{1.11}$$

となる。この式は光より導かれたものであるが、ドブロイはこの式は普遍的なものであり、電子などの粒子に対しても成立すると主張し、これに物質波という名称を与えた³⁶。

³³ただし、逆のアイデアが出現するまでには20年近い歳月が必要であった。それだけ画期的で常識に反する考え方であったわけだ。

³⁴この期間を前期量子論と呼ぶことがある。ドブロイの提案の後に、2種類の量子論が発表され、それまでは半経験的に行われていたことがきっちりとした理論にまとめられた

³⁵ $E = mc^2$ は質量とエネルギーの換算に係わる式で、原子核の崩壊など、量子力学的で扱われる現象にも適用できるものである。ただし、この式は非量子論である相対性理論から出てきたもので、そういう意味では古典的なものである。この授業では、この部分でしか出てくることはないだろう。

³⁶先ほどは電子に波動性があると定性的な表現をしたが、ここで、ようやく電子（だけでなく他の物質も含めて）どのような波動性があるのかをより定量的に扱える用になった。

もちろん、この主張は一つの仮説でしかない。しかし、仮説が示されることにより粒子の波動性を確認する実験が行われるようになった。そして、金属による電子線の回折が確認され、粒子も波動性を持つことが明らかになった³⁷。電子以外の陽子や中性子なども波動性を持っていることが実験的に確認されている。これらの粒子が波動性を持つことを粒子と波動の二重性という。電子が波動性を有することは電子顕微鏡という高分解能の虫眼鏡への道を切り開くことになった。

演習

1. 速度が光速の $1/100$ の電子線の物質波長を計算せよ。
2. 10KV の電位差により加速された電子の物質波長を計算せよ。

1.4 古典的な世界と量子論的な世界のつながり

ドブロイによれば、総ての粒子は波として振る舞うはずである。それにもかかわらず、我々の日常生活では、波と粒子はきっちりと区別されている。これを理解するためには、波と粒子がどの様に移りかわっていくのかについて、考えて見ることにしよう。

1.4.1 波長による違い

最初に波の波長が変化すると何が変わるかを調べることにする。光が粒子であるか波動であるかが問題になった時代に、光が粒子であるという根拠の一つとして光の直進性が上げられていた。1点から出た光はきっちとした影を作り、水波のように回折で影を作る物体の後ろ側に回り込むことがないように見える。

しかし、これは見かけのことであり、光の波長に比べて障害物が非常に大きいので、回折効果が顕著に見られないにすぎない。光の場合でも、波長程度の障害物に対しては回り込みの効果が顕著に出て来るし、光の波長程度のスリットを通した場合には回折による広がりが見える。

直進性という観点から見ると、波の幅と波長の関係が重要になる。波の幅と波長が同程度の場合には、波としての性質が顕著になるけれども、幅が波長よりも

³⁷余談になるけれども、光電効果の実験や電子線回折の実験で実験対象が金属であるのは意味のあることである。というのは、光電効果においては電子の放出が起きるので、もし基板が絶縁体だと表面に電荷が生じて測定結果に狂いが生じる。電子線回折の実験でも、同様に表面の帯電が起こり、回折パターンがきちんと観察出来なくなるであろう。この点、金属は導電性があるので、アースをきちんととることにより、帯電の問題を回避できるのである。

十分に大きければ、回折効果は観察されず、粒子のように直進するものと認識されるようになる。もう少し定量的に扱うなら、単一スリットの第1暗部の角度は、 $\theta = \arcsin \lambda/d$ であたえられる。回折波の強度は第1暗部より内側が、その外側に比べてはるかに強いので、この角度を波としての広がりと考えることにしよう。すると、 $\lambda/d = 0.001$ の時に回折広がりとは 0.06° 程度となる。物質波の波長は極めて短いために、普通の障害物を通過する場合には回折の効果はほぼ観察されないと考えられそうである。このような条件下では、二重スリットや回折格子での回折も実質的に観察出来なくなっていく。

1.4.2 波束

電子が粒子としても振る舞うように見えるためには、粒子としての電子を表す波動は単純な三角関数で表記できるような連続した波ではなくて、振幅の極大を持つような「波束」と呼ばれるような状況になっているだろうと想像できる。波束は電子に限ったものではなく、手を打った場合のような音も波束として伝わるはずである。イメージとしては、図 1.31 にしめす、うなりの兄貴分的なものになる。

量子論的なイメージでは、1 個の粒子に対応する波束は $E = h\nu$ に対応したエネルギーを持っていて、それが寄り集まって集団的な波に見える状態になっている³⁸。

さて、この波束は波ではあるが、ひとかたまりの同じエネルギーをもった振動という意味では粒子として数えられそうなものである。もし、波束を粒子として考えるなら、質量と大きさのあるものになる。質量は測定されているわけけれども、このような物体の大きさはどのように考えれば良

いのだろうか。まず長さだけれども、これは、単純には波束の半値幅程度と考えればよいだろう。では半値幅はどのようにきまっているかという、これは場合による。長い方は波長の数万倍程度になり得ると思うけれど、短い方はどう考え

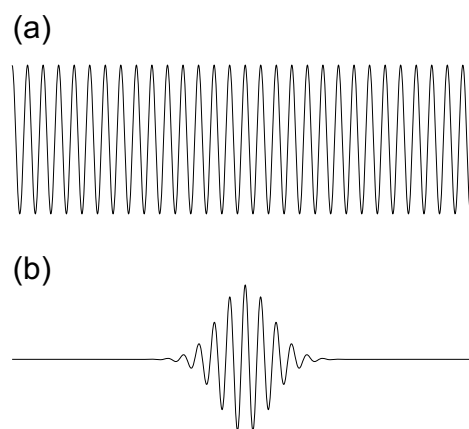


図 1.31: (a) 無限に続く波と (b) 波束

³⁸集団として集まるときに、ここの波束の位相が集団としてはばらばらな場合もあるし、揃っている場合もある。光では、白熱電球、蛍光灯、LED、太陽などの普通の光源から出て来る光は位相はばらばらなものである。それに対してレーザー光線は (程度はあるけれども) 位相の揃った波になっていて、これがレーザー光線の最大の特徴となっている。

ても数波長よりは短くはない。有効数字1桁で波長の数倍程度だろうか。では幅の方はというと、図からは波束の振幅が波束の幅のような印象になってしまうが、そもそもドブロイ波の振幅を実空間で計測する方法は知られて折らず、振幅をもって幅とすることは不可能な状況にある。ここで再び出て来のは波長と回折の関係だ。例えば丸いターゲットに、電子をぶつけることを考える。ターゲットに対して電子の波長が長ければ電子は回折をおこし、波であるかのように振る舞う。しかし、電子の波長がターゲットサイズより短いと、電子は点としてターゲットに当たって散乱したかのように振る舞うようになる。こうしてみると、電子の横幅も波長程度の大きさであると考えて大丈夫そうである。

もし粒子の大きさがドブロイ波長で決まるなら、同じ粒子でも運動量を増してドブロイ波長を短くすると粒子径が小さくなっていくことになる。これは、信じがたいような考えであるし、それ以前に、日常的な大きさのもののドブロイ波長は極めて短いのに、普通の大きさで観察されるという問題が生じてしまう。この問題に対する答えは、単一の粒子ではなく複合構造を持っているものは、その複合構造に依存する最小サイズが決まっており、それより小さくなることはないけれども複合構造を持たないものはいくらでも小さくなるというものである。

たとえば、地球は質量が大凡 $6 \times 10^{24} kg$ で太陽に対する公転速度が約 $30 km/s$ で運動する球体である。これより地球のドブロイ波長を求めると $\lambda = 6.6 \times 10^{-34} / (6 \times 10^{24} \times 30 \times 10^3) = 3.7 \times 10^{-63} m$ となる。上に記したように、粒子の大きさがドブロイ波長程度であるなら、地球は目にも見えないような小さな存在でなければならない。しかし、幸いにも運動量は地球は多くの原子から構成された構造をもっているため、現在の地球以下のサイズにはなれない。逆に、もし、地球のドブロイ波が現在の地球のサイズより大きかったら、地球は（質量は変わらないけれども）より大きな粒子のごとく振る舞うはずなのである。

電子に関しては、今の所、実験的に最小のサイズには行き着いていない。電子は素粒子実験で弾丸代わりに用いられており、あまり大きくない速度で、陽子や中性子にぶつけると、陽子や中性子は一つの玉であるかのように見える。しかし、速度を大きくして、ドブロイ波長を陽子や中性子の大きさよりも短くすると、陽子や中性子の中には3つの球体が存在しているのが見えるようになる。電子の実効的な大きさが小さくなって、より細かい構造が見られるようになったのである。こうして、陽子や中性子は単一粒子ではなく何かの複合体であり、最小のサイズを持つものであることが明らかになった。現在では陽子の直径は $1.8 \times 10^{-15} m$ と見積もられている。

光や電子を粒子として扱うか、波動として扱うかは人間側の都合に大きく依存する。可視領域の光を考えると、太陽電池など、光が吸収されてエネルギーを生み出すプロセスを考えると、1個の波束が吸収されると、電子が1個励起されるの

で、間違いなく粒子として扱う方がよい。一方で、虹や回折などの光学現象を考えると、波動として考えないと話がややこしすぎることになる³⁹。同じ波長の光でも、時と場合により二つの面のどちらかを主流にして考えるかが異なってくる。

エネルギーのやりとりがあるときは粒子として考えると言ったけれども、テレビやラジオで電場を受信する場合には、電波を粒子としてではなく波として扱っている。これには二つの因子が絡んでいる。一つ目は光子エネルギーで、光の場合は、可視光で $3 \times 10^{-19} J$ 程度あり、 kT に比べて大きいものに対して、電磁波だとたとえば携帯の 2GHz の周波数帯では光子エネルギーは $1.3 \times 10^{-33} J$ と kT に比べてはるかに小さい。このためエネルギーは連続的に変化できると考えて問題ないし、先ほどの太陽電池とは違って、一つの光子が何かを引きおこすのではなく、光子が莫大な数集まった集団として生じる電場が物事を引きおこしている。。そして二つ目は波長が日常的なスケールのもので、どのような関係にあるかだ。2GHz の電波の波長は 0.15m 程度であり、身の回りの物体で回折やら干渉を引き起こすような波長にある。このような時には波として考える方がよいことは言うまでもない。

1.5 物理の統一理論への道

古典的な物理では波として扱われていた光も、粒子として扱われるべき存在だった電子を初めとする素粒子も、いずれも粒子と波動の二重性を有するものである。このことは、両者がおんなじ物理理論の枠組みで取り扱える可能性を示している。実際、量子力学を深めることにより、両者を統一した、究極の物理理論への挑戦が始まることになった。この挑戦は、その後、素粒子間の他の二つの相互作用も取り扱える形に拡張している。ただし、重力を量子力学的に取り扱うことは、非常に難しく、標準的な手法では、重量も含めた統一理論は構築されていない。数学的には、超弦理論なら重力も取り込めるとされているけれども、理論から現実世界へのつながりが取れておらず、現時点では物理理論というより、数学体系と呼んだ方が適切な状況にある。

³⁹ただし、光学現象といっても、単純な屈折によるレンズの集光などでは、波動性を考えずに計算をおこなっても大丈夫である。もっとも、この場合には粒子として扱っているわけでもなく、さらに簡素化して考えていることになるのだけれど

