確率と統計(O)
「確率不等式と擬似乱数」

- 担当教員： 杉山　将（計算工学専攻）
- 居室： W8E-406
- 電子メール: sugi@cs.titech.ac.jp

- 授業のウェブサイト:

  http://sugiyama-www.cs.titech.ac.jp/~sugi/

講義計画(シラバス)

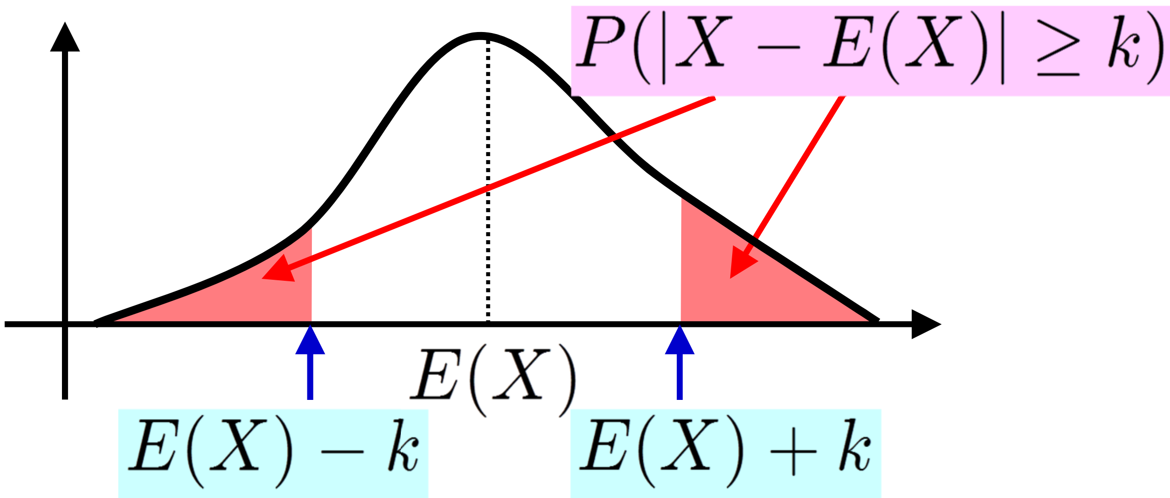
- 確率と統計の基礎
- 確率変数, 確率分布
- 積率, 積率母関数
- 離散型の確率分布の例
- 連続型の確率分布の例
- 確率不等式, 擬似乱数
- 多次元の確率分布
- 大数の法則, 中心極限定理
- 統計的推定, 仮説検定

チェビシェフの不等式

- チェビシェフの不等式(Chebyshev's inequality)

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{V(X)}{k^2} \qquad k > 0$$

- 確率分布の具体的な形は分からないが期待値と分散が分かるとき，チェビシェフの不等式によって確率の上限が計算できる
- チェビシェフの不等式はいかなる確率変数に対しても成立する！



チェビシェフの不等式（証明）

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{V(X)}{k^2}$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (X - E(X))^2 f(X) dX$$

$$\geq \int_I (X - E(X))^2 f(X) dX$$

$$I = \{X : |X - E(X)| \geq k\}$$

$$\geq k^2 \int_I f(X) dX$$

$$= k^2 \, P(|X - E(X)| \geq k)$$

チェビシェフの不等式の使用例

演習

1. ある試験の点数の平均が60点，分散が20であった．65点以上または55点以下の人は全体の何パーセント以下か？
2. ある試験の点数の平均が60点，分散が30であった．点数が50点より高く70点より低い人は全体の何パーセント以上か？

その他の便利な不等式

- マルコフの不等式(Markov's inequality):

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{a} E[X] \quad \text{for any } a > 0$$

- ジェンセンの不等式(Jensen's inequality):

$$E[h(X)] \geq h(E[X])$$

$h(x)$:凸関数

- ヘルダーの不等式(Hölder's inequality):

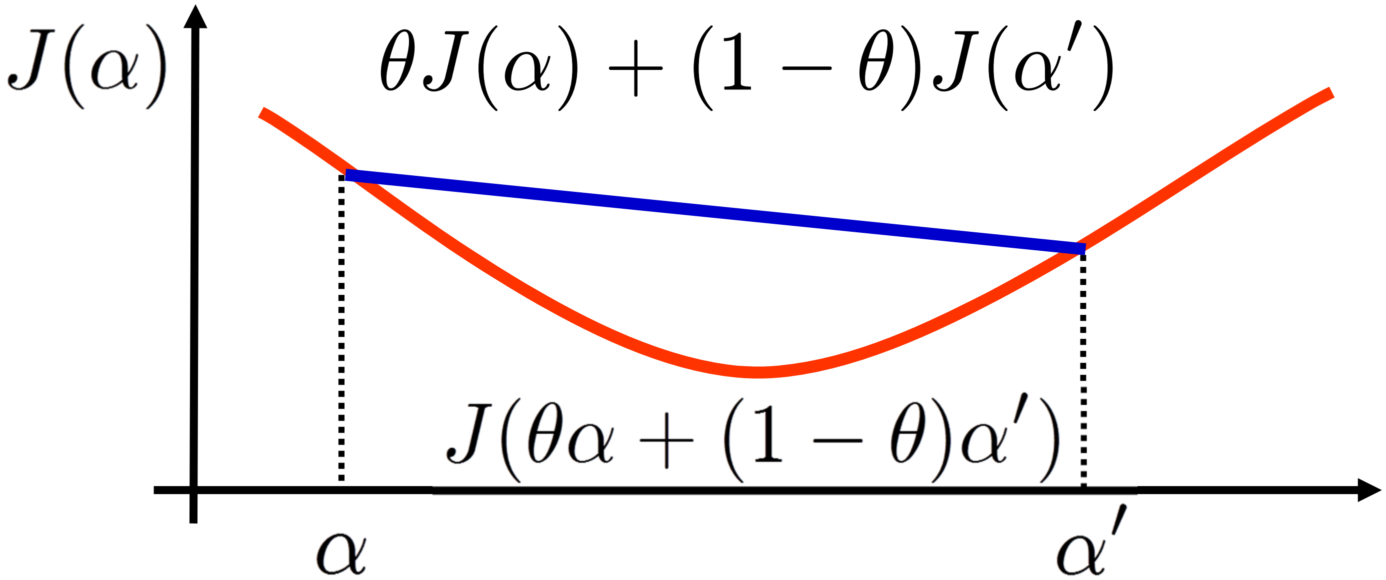
$$E[|XY|] \leq (E[|X|^p])^{1/p} (E[|Y|^q])^{1/q}$$
$$\text{for any } p, q > 0 \text{ such that } 1/p + 1/q = 1$$

特に $p = q = 2$ の場合をシュワルツの不等式(Schwarz's inequality)とよぶ

凸関数

- 任意の α, α' と任意の $\theta \in (0,1)$ に対して以下の式が成り立つとき，$J(\alpha)$ は凸関数 (convex function)であるという

$$J(\theta\alpha + (1-\theta)\alpha') \leq \theta J(\alpha) + (1-\theta)J(\alpha')$$



計算機による乱数の生成

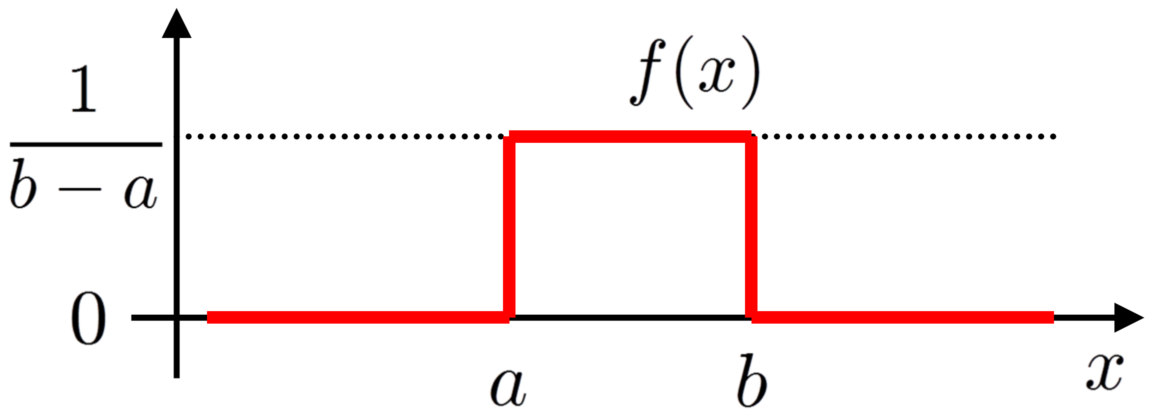
- 乱数を計算機内で生成するのは非常に難しい！
- 乱数を生成するための専用のハードウェアもある.
  - 電子素子の熱雑音などの物理現象を利用
- 一般には，擬似乱数を用いることが多い.
  - C言語のrand関数は一様擬似乱数を生成する

一様分布

- 連続一様分布(uniform distribution of continuous type) : 確率密度関数が一様

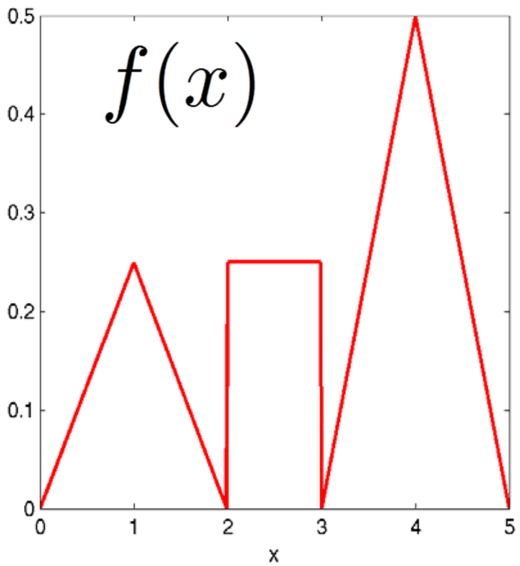
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

- (a, b) 上の一様分布を $U(a, b)$ と表す.



計算機による乱数の生成

- 一様擬似乱数や正規擬似乱数を生成する関数は，大抵の計算機言語で用意されている．
- それ以外の任意の確率密度関数 $f(x)$ を持つ確率分布に従う乱数 u も作りたい（$u \sim f(x)$ と表す）．



乱数の生成法1

- 逆関数法(inverse transform sampling):

1. $u \sim U(0,1)$を発生させる.
2. $x = F^{-1}(u)$は確率密度 $f(x)$を持つ.

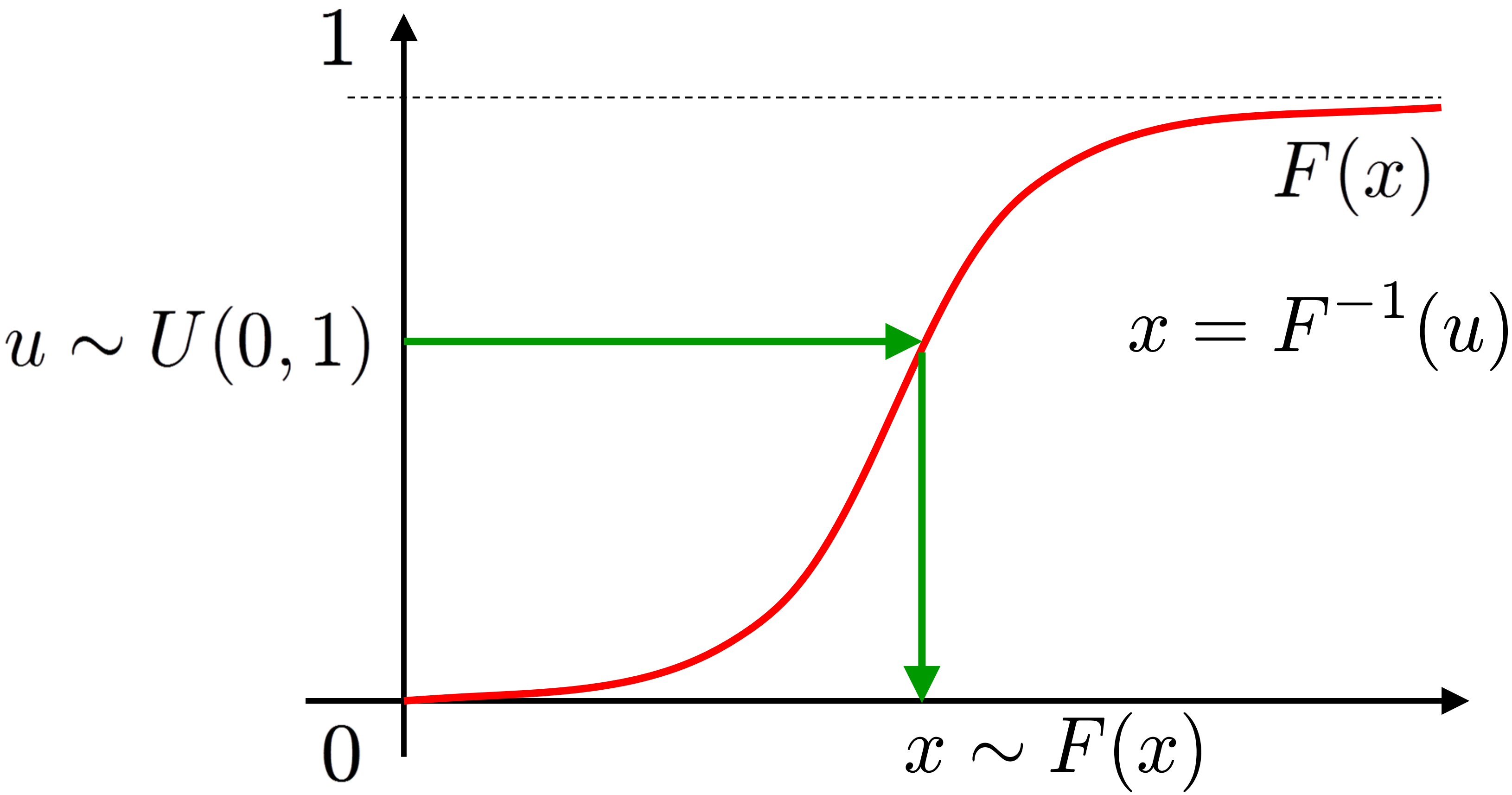
$F^{-1}(u)$: $F(x)$ の逆関数

$$u = F(x) \qquad x = F^{-1}(u)$$

$F(x)$: $f(x)$ の累積分布関数

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(X)dX$$

逆関数法(続き)



逆関数法(証明)

- $\forall v, \quad P(x \le v) = F(v)$ を示す.

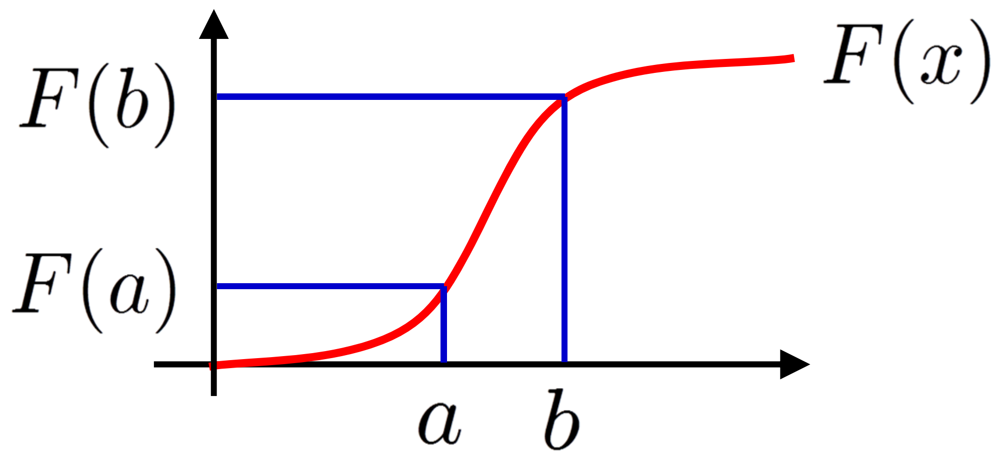
$$
\begin{aligned}
P(x \le v) &= P(F^{-1}(u) \le v) \\
&= P(u \le F(v)) \\
&= \int_{-\infty}^{F(v)} g(u)du \\
&= \int_{0}^{F(v)} du \\
&= F(v)
\end{aligned}
$$

$$x = F^{-1}(u)$$

$$a \le b \Rightarrow F(a) \le F(b)$$

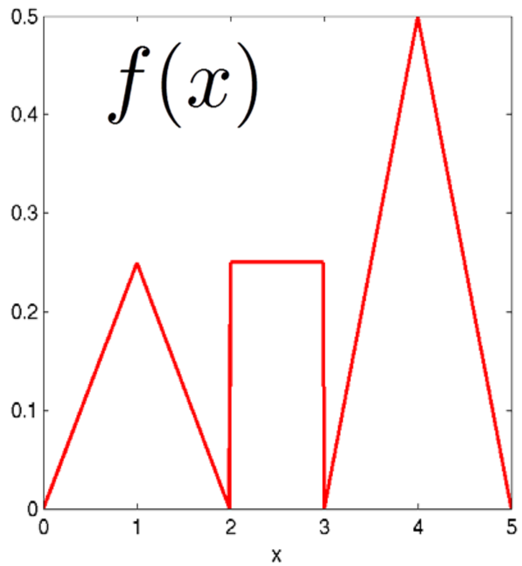
$$g(u) = \begin{cases} 1 & (0 \le u \le 1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(uの確率密度関数)

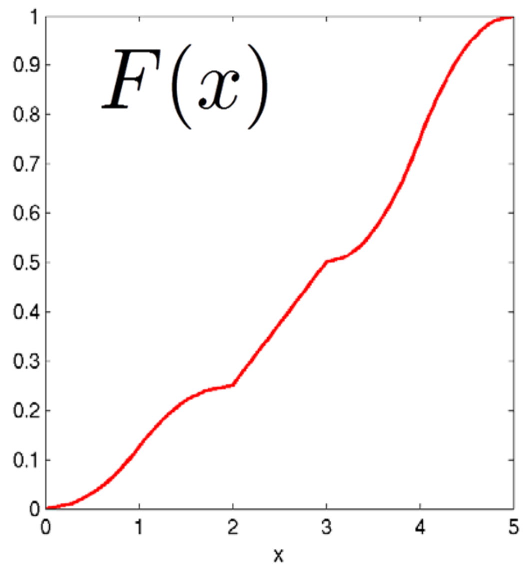


逆関数法による乱数生成の例

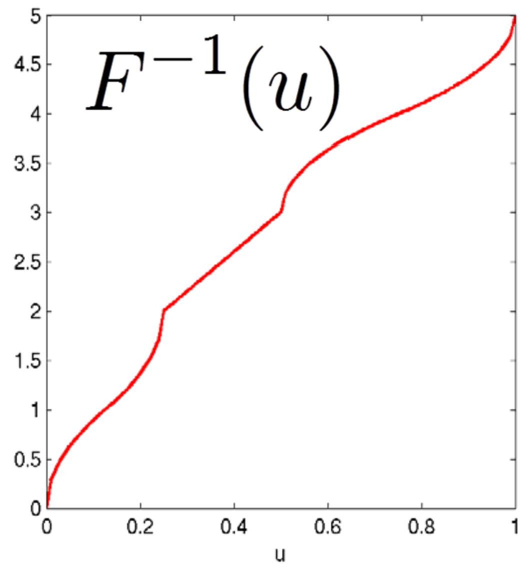
$$x = F^{-1}(u)$$



確率密度関数

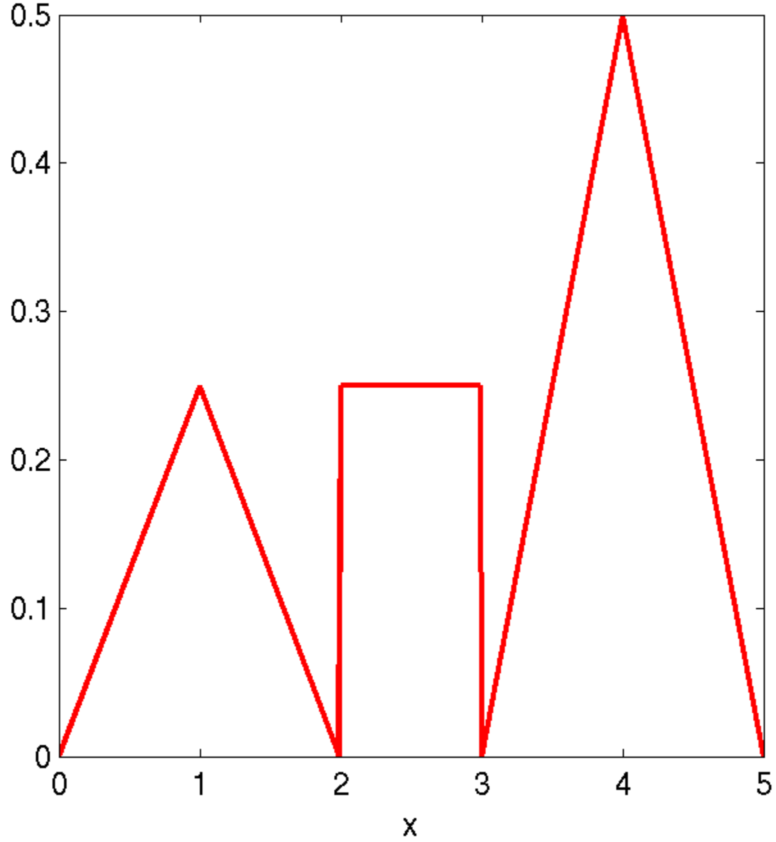


累積分布関数

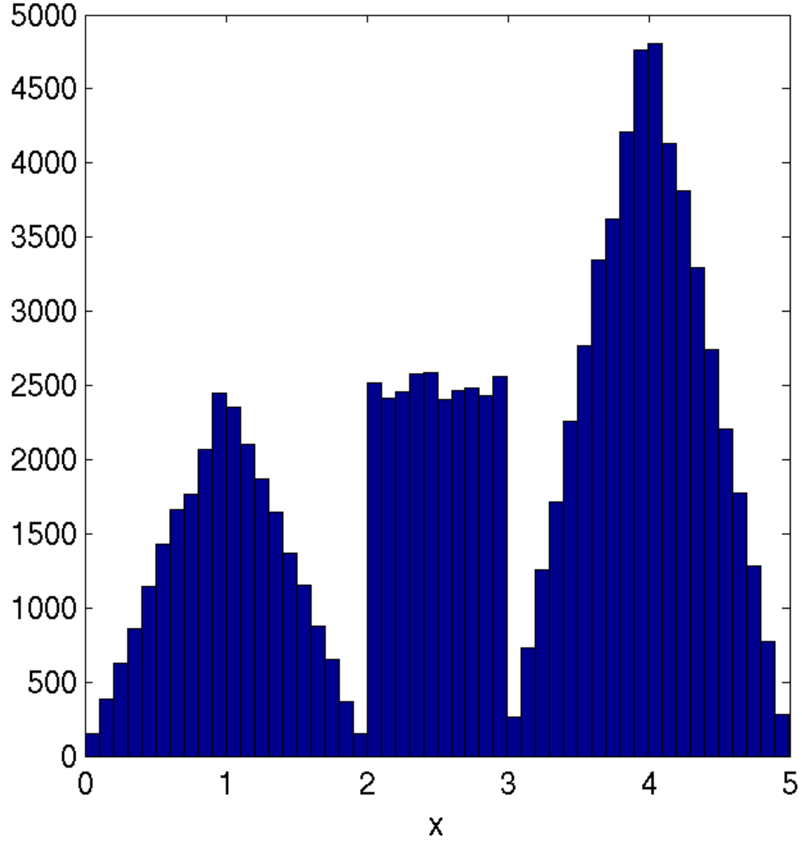


累積分布関数の逆

逆関数法による乱数生成の例(続き)



確率密度関数



生成した乱数の
ヒストグラム

乱数の生成法2

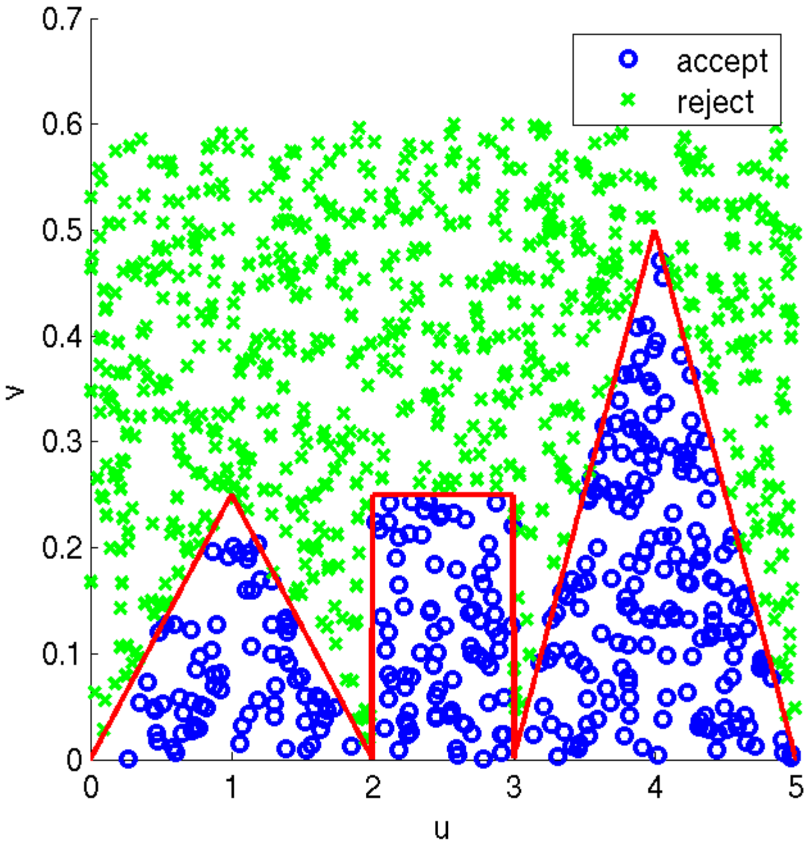
- 棄却法(rejection sampling):

1. $u \sim U(a,b)$ を発生させる.

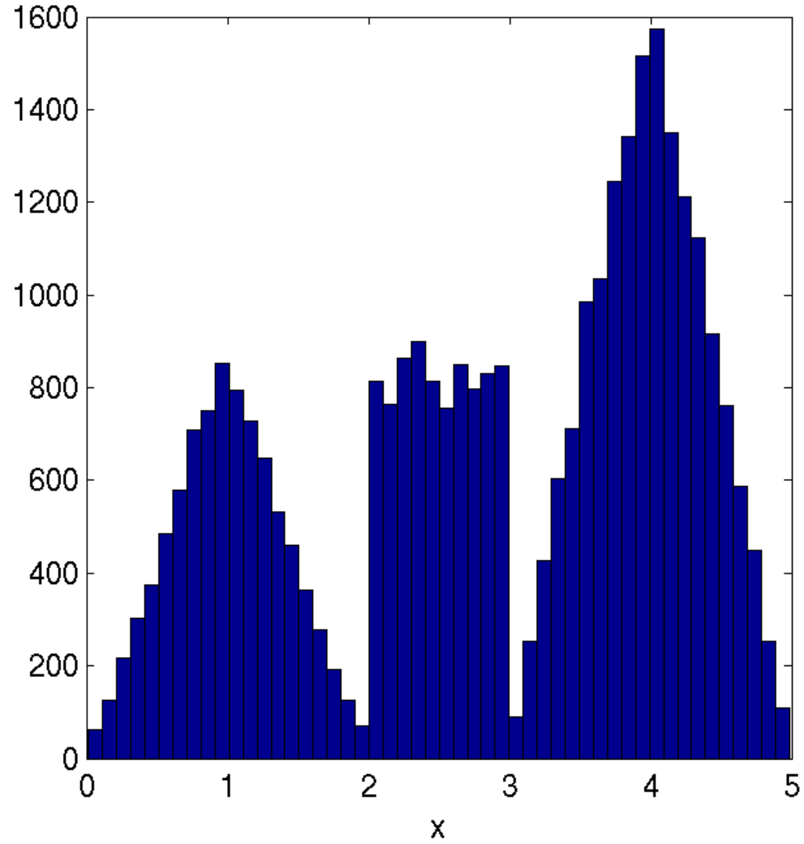
(a,b) : $f(x)$ の定義域

2. $v \sim U(0, \max_x f(x))$ を発生させる.
3. $v \leq f(u)$ ならば u を採択(accept)し,
そうでなければ棄却(reject)する.
4. 1. にもどる.

棄却法による乱数生成の例



確率密度関数



生成した乱数の
ヒストグラム

逆関数法と棄却法の問題点

- 逆関数法:
  - 逆関数がきれいな形で求まらないことがある.
- 棄却法:
  - 棄却域が大きい場合, たくさんの乱数を発生させるのに時間がかかる.

まとめ

- 確率不等式
  - チェビシェフの不等式
- 計算機による乱数の生成
  - 逆関数法
  - 棄却法

宿題

- 歪んだ6面体のさいころ（出る目は1，2，3，4，5，6）がある．この変なさいころの出る目は
  - 期待値が2．2
  - 分散が1

  であるという．チェビシェフの不等式を用いて以下の問いに答えよ．

1. 6が出る確率は最高でいくらか？
2. 1，2，3のいずれかがが出る確率は最低いくらか？
3. 2が出る確率は最低でいくらか？

連絡事項

- ５月３１日（金）の授業は，情報工学科計算機室で行う
  http://www.csc.titech.ac.jp/
- 内容：乱数の発生法に関する計算機実習
- 資料を事前にOCWに公開するので，目を通しておくこと.
- 10時45分までに計算機室に集合すること
- 情報工学科計算機室のアカウントを持っていない学生は，授業終了後に相談に来ること