

電気学第一：回路の基礎(2. 交流回路と回路部品)

担当：荒井滋久(南9号館704号室、arai@pe.titech.ac.jp)

2. 交流回路と回路部品

日常生活では、電池などの直流を用いる機器よりも、商用周波数(50 Hz や 60 Hz)の交流によって動作する機器が多い。さらに、各種情報信号は交流やその値が時間や場所によって変化する 경우가大部分である。交流回路では抵抗、コンデンサ、コイルが主要な部品となる。

2.1 交流

最も標準的な交流は図 2.1 に示す正弦波(あるいは三角関数波)であり、その周波数を f [Hz] とすると、電圧 v と電流 i は次のように書ける。

$$v(t) = V_m \sin(2\pi ft + \theta_v) = V_m \sin(\omega t + \theta_v) \quad (1)$$

$$i(t) = I_m \sin(2\pi ft + \theta_i) = I_m \sin(\omega t + \theta_i) \quad (2)$$

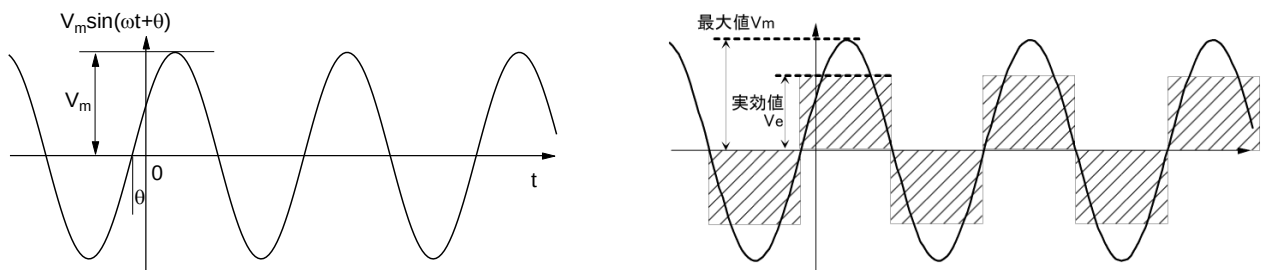


図 2-1 正弦波交流と実効値

ここで、 V_m 、 I_m は最大電圧および最大電流、 $\omega = 2\pi f$ は角周波数、 θ_v 、 θ_i は位相角である。振幅は 2 乗平均値を求め、実効値として電圧や電流の大きさを表す(図 2-1)。すなわち、次のように計算する。

$$V_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v(t)^2 dt} \quad (3)$$

$T = 1/f$ は周期である。正弦波の場合には、実効値は次のように求まる。

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0.707V_m \quad (4)$$

また、複雑な波形も、フーリエ級数展開によって三角関数の和として表現できるので、交流回路の解析は主に正弦波について行う。基本波($n=1$)に第 3、5、7 高調波を加えて、方形波に近い波形が合成できる様子を図 2-2 に示す。

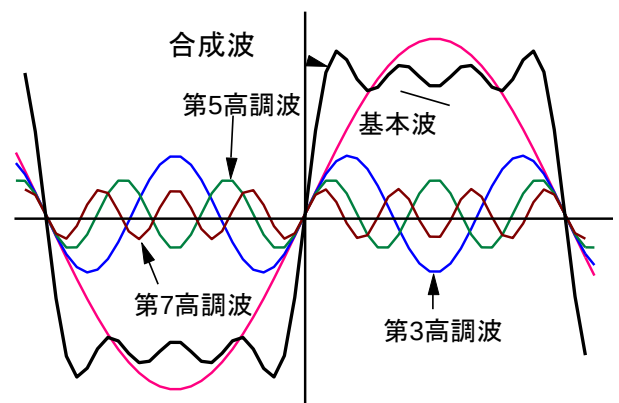


図 2-2

2.2 回路部品

(1) 抵抗 R

オームの法則により

$$v(t) = Ri(t), \quad i(t) = \frac{v(t)}{R} \quad (5)$$

がいつでも成立する。

(2) インダクタンス(コイル) L

コイルを流れる電流が変化すると、そのコイルに鎖交している磁束が変化する。この磁束変化によってコイルの両端に誘起される起電力は電流の時間変化に比例する。この比例係数は自己インダクタンスとよばれ、 L で表される。すなわち、

$$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \quad (6)$$

あるいは、

$$i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt \quad (7)$$

となる。電圧 v がボルト、電流 i の時間変化 $\frac{d}{dt} i(t)$ がアンペア/秒のとき、 L の単位はヘンリー [H] である。

(3) キャパシタンス(コンデンサ) C

端子間の電位差 v は、コンデンサに蓄積された電荷量 q に比例する。比例係数 C は静電容量あるいはキャパシタンスとよばれ、次の関係が成立つ。

$$q(t) = Cv(t) \\ i(t) = \frac{d}{dt} q(t) = C \frac{d}{dt} v(t) \quad (8)$$

あるいは、

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (9)$$

電荷 q がクーロン [C]、電圧 v がボルト [V] のとき、 C の単位はファラッド [F] である。実用上の単位はマイクロファラッド [μF] = 10^{-6} [F] やピコファラッド [pF] = 10^{-12} [F] である。

表 2-1 に回路素子の電圧・電流応答性をまとめて示す。これらの回路素子の直列接続回路では、回路素子に流れる電流が共通であり、これによって各回路素子の端子間電圧が決まる。一方、並列接続回路では、各素子に加わる電圧が共通となり、これによって各素子を流れる電流が決まる。

表 2-1 回路素子の電圧・電流応答性

回路要素	端子間電圧	要素に流れる電流
抵抗 R	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{v(t)}{R}$
インダクタンス L	$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$	$i(t) = \frac{1}{L} \int v(t) dt$
キャパシタンス C	$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$	$i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$

2.3 交流回路

(1) インピーダンス

ある回路素子のインピーダンスとは、電流に対する電圧の比である。すなわち、

$$\text{インピーダンス} = \text{電圧} / \text{電流}$$

正弦あるいは余弦波電圧と電流についての比は、大きさと角度で表す必要がある。次章で、大きさと角度をまとめて表現する方法を学ぶが、ここでは大きさと角度を別々に求める。

a. 抵抗 R

純抵抗では電流と電圧は同位相であり、インピーダンスの大きさは R である。

b. インダクタンス(コイル) L

両端の電圧を $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta_v)$ とすると、インダクタンスに流れる電流は次のようになる。

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int v dt = \frac{-V_m}{\omega L} \cos(\omega t + \theta_v) \\ &= \frac{V_m}{\omega L} \sin(\omega t + \theta_v - \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (10)$$

すなわち、電流は電圧よりも $\pi/2$ (90°) 位相が遅れる (図 2-3)。

インピーダンスの大きさ $|Z|$ は $|v| = |Z||i|$ となるように定める

ので、 ωL である。

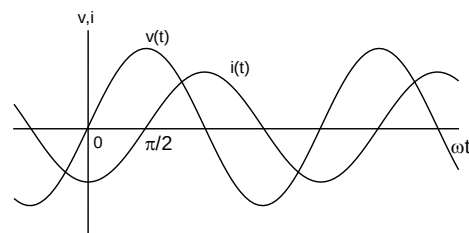


図 2-3 インダクタンスの電圧と電流

c. キャパシタンス(コンデンサ) C

両端の電圧を $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta_v)$ とすると、キャパシタンスに流れる電流は次のようになる。

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv}{dt} = \omega C V_m \cos(\omega t + \theta_v) \\ &= \omega C V_m \sin(\omega t + \theta_v + \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \quad (11)$$

すなわち、電流は電圧よりも $\pi/2$ (90°) 位相が進む (図 2-4)。

インピーダンスの大きさは $\frac{1}{\omega C}$ である。

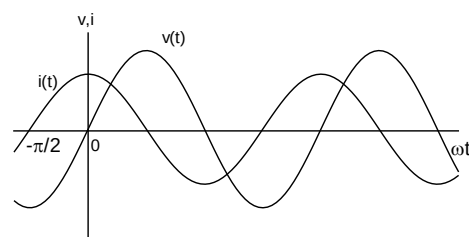


図 2-4 キャパシタンスの電圧と電流

(2) 抵抗とインダクタンスの直列接続回路

図 2.5 に示す回路に、 $i(t) = I_m \sin \omega t$ の電流が流れている。

正弦波関数で電圧を表すことを考えると、

$$\text{抵抗 } R \text{ の両端に加わる電圧 } v_R = RI_m \sin \omega t$$

$$\text{インダクタンス } L \text{ の両端に加わる電圧 } v_L = \omega LI_m \cos \omega t$$

R と L は直列接続であるので、全体に加わる電圧は次のようになる。

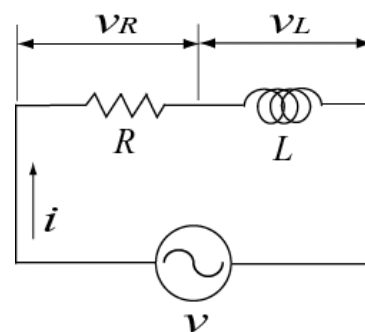


図 2-5 RL 直列接続回路

$$\begin{aligned}
 v &= v_R + v_L = RI_m \sin \omega t + \omega LI_m \cos \omega t \\
 &= \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I_m \sin \left(\omega t + \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right)
 \end{aligned} \quad (12)$$

したがって、この回路のインピーダンスの大きさは $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ であり、電圧は電流よりも $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$ だけ角度(位相)が進んでいる。 $R \gg \omega L$ ならば $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \rightarrow 0$ であり、逆に $R \ll \omega L$ ならば $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ である。すなわち、 R と L の直列接続では、電圧は電流よりも $0 \sim 90^\circ$ の範囲で位相が進むが、進む位相の大きさは R と ωL との相対比率で決まる。

(3) 抵抗とコンデンサの並列接続回路

図 2.6 に示す回路に、 $v(t) = V_m \sin \omega t$ の電圧が加えられている。正弦波関数で全電流を考える。

$$\begin{aligned}
 i &= i_R + i_C = \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} = \frac{V_m}{R} \sin \omega t + \omega C V_m \cos \omega t \\
 &= \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2} V_m \sin \left\{ \omega t + \tan^{-1} (\omega C R) \right\}
 \end{aligned} \quad (13)$$

したがって、この回路のインピーダンスの大きさは $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}}$ である。

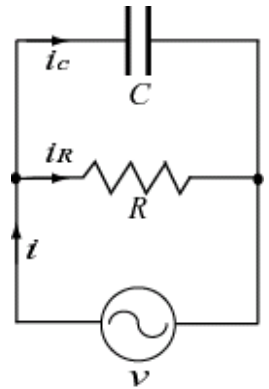


図 2-6 RC 並列接続回路

また、電流は電圧よりも $\theta = \tan^{-1} (\omega C R)$ だけ位相が進んでいる。もし

$R \gg \frac{1}{\omega C}$ ならば $\theta = \tan^{-1} (\omega C R) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ でコンデンサに流れる電流が

支配的になる。逆に、 $R \ll \frac{1}{\omega C}$ ならば $\theta = \tan^{-1} (\omega C R) \rightarrow 0$ となり、抵抗を流れる電流が支配的になる。

2.4 交流回路における電力

多くの電気装置では、そこで消費される電力に関心をもたれる。装置あるいは回路の任意の時間における電圧と電流の積 $p = v(t)i(t)$ は瞬時電力とよばれる。瞬時電力 p は正になったり負になったりする。電力が正ということは電源から負荷に電力を供給していることを、電力が負ということは負荷に蓄えられた電力が電源に返されることを意味する。

(1) 電力

抵抗のみから構成されている回路に電圧 $v(t) = V_m \sin \omega t$ を加えると、回路に流れる電流は $i(t) = I_m \sin \omega t$ となり、瞬時電力は $p = v(t)i(t) = V_m I_m \sin^2 \omega t$ となる。したがって、この場合は瞬時電力は常に正である。電力 P は瞬時電力の平均として

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt$$

で与えられる。ここで、 T は周期である。抵抗回路の場合は $P = \frac{V_m I_m}{2} = V_e I_e$ となる (V_e 、 I_e は電圧、電流の実効値)。

コンデンサに加える電圧が $v(t) = V_m \sin \omega t$ のとき、流れる電流は

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v(t) = \omega C V_m \cos \omega t$$

であるから、瞬時電力は

$$p = v(t)i(t) = \omega C V_m^2 \sin \omega t \cos \omega t$$

となり、1 周期にわたって平均をとると、次のように電力が 0 になる。

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \omega C V_m^2 \sin \omega t \cos \omega t dt = \frac{\omega C V_m^2}{2T} \int_0^T \sin 2\omega t dt = 0$$

これは、図 2-7 に示すように、正負の瞬時電力が打ち消しあい、電力が消費されないことを意味する。コイルについても、同様なことがいえる。

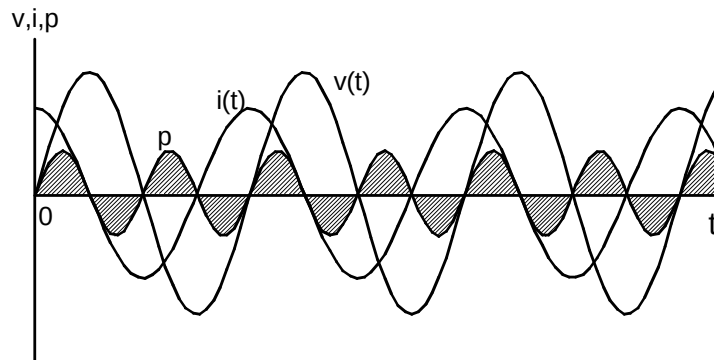


図 2-7 キャパシタンスの電圧、電流、瞬時電力

(2) 力率

一般に、ある回路に加える電圧 v と電流 i は、 $v = V_m \sin \omega t$ 、 $i = I_m \sin(\omega t \pm \theta)$ と書ける。ここで、回路で電流の位相が進む場合と遅れる場合を考慮して、位相角を $\pm \theta$ としている。この場合、回路で消費される電力は、次式で与えられる。

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T V_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t \pm \theta) dt = \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta = V_e I_e \cos \theta$$

ここで、 $\cos \theta$ を力率という。力率は、消費電力の多いパワーエレクトロニクスや電気機器では重要なパラメータである。電熱器や白熱電球などのように、純抵抗が負荷の場合の力率は $100\% (\cos \theta = 1)$ であるが、蛍光灯は $\cos \theta \approx 0.75$ である。