電気学第一：回路の基礎（0. 回路の歴史、1. オームの法則と電気回路）

担当：荒井滋久 (南 9 号館 704 号室、arai@pe.titech.ac.jp)

回路理論の基礎（アナログ回路）講義内容

0.回路の歴史
1.オームの法則と電気回路
2.交流回路と回路部品
3.複素数を用いた交流回路の表現
4.増幅回路（オペアンプ）

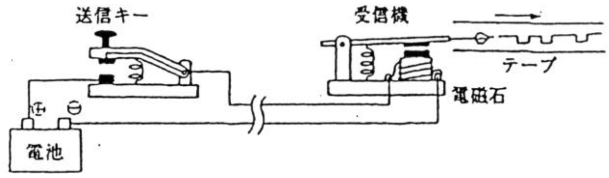


図 1-1 モールス電信機

0. 回路の歴史

・モールス信号電信機 (1837)
・電話 (グラハム・ベル、1876)
・無線 (マルコーニ、1899) 同調(共振)回路
・三極真空管 (ド・フォレスト、1907) 増幅回路
・ラジオ放送 (ピッツバーグ、1922)
・ディジタル計算機 (エイキン、1944)
・トランジスタ (ブラッデン、バーディン、1948)
・集積回路 (1962) -->ムーアの法則(1.5 年で回路規模 2 倍)

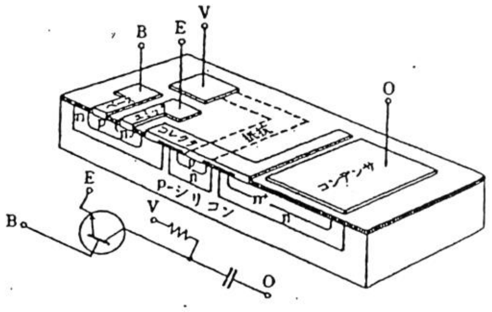


図 1-2 集積回路

1. オームの法則と電気回路

1.1 オームの法則（Ohm's law）

電圧 V (単位はボルト：V)、電流 I(単位はアンペア：[A])、抵抗 R (単位はオーム：[Ω])の間にはオームの法則(1)式が成立する。

$$V = RI \qquad (1)$$

R は抵抗体の断面積 A に反比例し、長さ l に比例するので、次のように書き表すことができる。

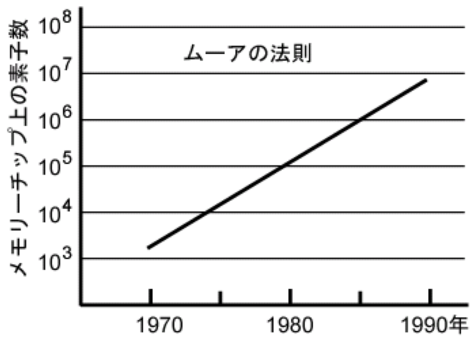


図 1-3 ムーアの法則

$$R = \rho \frac{l}{A} \qquad (2)$$

ここで、ρ は抵抗率であり単位は[Ωm]である。

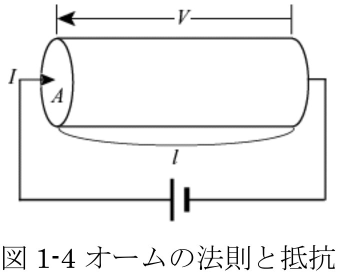


図 1-4 オームの法則と抵抗

表 1-1 抵抗率

物質		抵抗率 ρ [Ωm]
導体	銀	1.62×10^{-8}
	銅	1.72×10^{-8}
	アルミニウム	2.75×10^{-8}
	鉄	9.8×10^{-8}
	すず	11.4×10^{-8}
	鉛	21.9×10^{-8}
不導体	ガラス	10^{9}～10^{11}
	磁器	3×10^{11}
	大理石	10^{7}～10^{9}
	ベークライト	10^{6}～10^{10}

【例題 1-1】

長さ 100 m、断面積 1 mm² の銅線の抵抗はいくらか。

(解答 1-1)

表 1-1 より、銅の抵抗率は 1.72×10⁻⁸ Ωm であるので、式(2)に代入して 1.72 Ω と求まる。

半導体(Si、Ge、Se 等)の抵抗率は、導体と不導体の中間にあり、10^{-4} から 10^{-6} Ωm の抵抗率をもつが、不純物の濃度に大きく依存する。

抵抗は温度によっても変化する。温度が高くなると金属の抵抗は増加するが、半導体や絶縁体などは減少する。温度変化の大きい半導体が温度計や温度センサとして用いられている(サーミスタ)。

1.2 抵抗回路、直並列接続

(1)直列接続

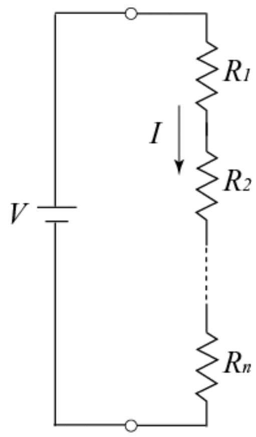
全ての抵抗に等しい電流 I が流れるので(図 1-5(a))、両端の電圧 V は次式のようになる。

$$V = R_1 I + R_2 I + \ldots + R_n I = (R_1 + R_2 + \ldots + R_n) I \quad (3)$$

これと抵抗 R に対するオームの法則（Ohm's law）$V = RI$ を比べることで､直列接続された抵抗を一つの抵抗 R とみなせば、

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n \quad (4)$$

となる。



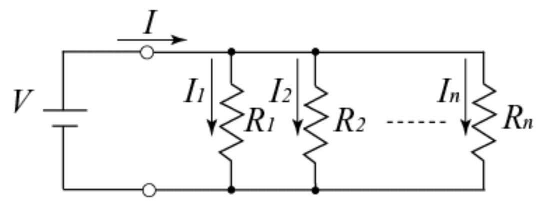
(a)

(2)並列接続

全ての抵抗の両端に等しい電圧 V がかかるので(図 1-5(b))、抵抗 R_i に流れる電流 I_i は次式で与えられる。

$$I_i = \frac{V}{R_i}$$

全ての抵抗に流れる電流の総和が全電流 I になるので、電圧 V と電流 I の間には次の関係が成立つ。



(b)

図 1-5 (a)直列接続と(b)並列接続

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \ldots + \frac{V}{R_n}$$
$$= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} \right) V$$

すなわち、

$$V = \frac{I}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \ldots + \dfrac{1}{R_n}} \quad (5)$$

となるので、並列接続された抵抗を一つの抵抗 R とみなせば、R は次のようになる。

$$R = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \ldots + \dfrac{1}{R_n}} \quad \text{あるいは、} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} \quad (6)$$

【例題 1-2】

図 1-6 の回路で、

(1)電圧計を接続しないとき、抵抗R_2の両端の電圧 V を求めよ。

(2)この抵抗の両端に内部抵抗 40 kΩ の電圧計を接続して電圧を測定したら、電圧 Vはいくらになるか。

(3)電圧計の内部抵抗が 4 kΩ の場合には、電圧 Vはいくらになるか。

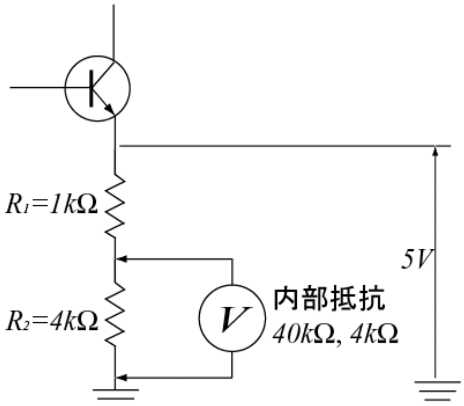


図 1-6 抵抗回路と電圧測定

(解答 1-2)

(1)1 kΩ と 4 kΩ の直列接続であるから、合成抵抗は 5 kΩ。

この両端に 5 V の電圧がかかるので、流れる電流は 1 mA。したがって、4 kΩ の抵抗の両端には 4 kΩ×1 mA=4 V の電圧がかかっている。

別の見方をすると、電圧 5 V が 1 kΩ と 4 kΩ の抵抗で分割されている。二つの抵抗に流れる電流は同一なので、抵抗の両端にかかる電圧は抵抗の大きさに比例して分割される。つまり、5 V を 1 kΩ : 4 kΩ で分割するので 4 kΩ の両端には$5\ \mathrm{V}\times\frac{4}{1+4}=4\ \mathrm{V}$がかかっている。

(2) 抵抗 4 kΩ と電圧計の内部抵抗 40 kΩ を並列接続すると合成抵抗は$R=\frac{4\times 40}{4+40}\mathrm{k\Omega}=\frac{40}{11}\mathrm{k\Omega}$となる。これと抵抗 1 kΩ を直列接続すると、$R$ の両端にかかる電圧は次のように求まる。

$$V=5\ \mathrm{V}\times\frac{\frac{40}{11}}{1+\frac{40}{11}}=5\ \mathrm{V}\times\frac{40}{51}=\frac{200}{51}\ \mathrm{V}=3.92\ \mathrm{V}$$

(3)(2)と同様に考える。合成抵抗$R=\frac{4\times 4}{4+4}\ \mathrm{k\Omega}=2\ \mathrm{k\Omega}$と抵抗 1 kΩ の直列接続であるから、$R$の両端にかかる電圧は次のように求まる。

$$V=5\ \mathrm{V}\times\frac{2}{1+2}=\frac{10}{3}\ \mathrm{V}=3.33\ \mathrm{V}$$

(2)と(3)を比較してわかるように、電圧計の内部抵抗の大きさにより、電圧計に表示される電圧の大きさが異なる。(1)の場合は、内部抵抗が無限大の電圧計を接続したことに対応するので、電圧計の内部抵抗は大きければ大きいほど、被測定回路に影響を与えず正確に電圧が測定できることを意味する。

1.3 キルヒホフの法則（Kirchhoff’s law）

(1)第 1 法則：回路中の任意の接続点に流入する電流の総和と流出する電流の総和は等しい。

すなわち、図 1-7 の接続点 E において次式が成立する。

$$i_5+i_7=i_6+i_8 \qquad (7)$$

ここで、流出する電流の符号を－とすれば、接続点における電流の総和は$i_5-i_6+i_7-i_8=0$であることがわかる。

(2) 第 2 法則：任意の閉路に沿った起電力の代数和は、抵抗による電圧降下の代数和に等しい。

すなわち、図 1-7 において、$A \to B \to C \to D \to A$ の閉路に適用すると、

$$R_1 i_1 - R_2 i_2 + R_3 i_3 + R_4 i_4 = -V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \quad (8)$$

となる。ここで、電圧降下は経路の方向と電流の方向が一致する場合は＋とし、起電力は経路の方向が電源の－から＋に向かう場合を＋とする。

この法則は、経路が閉じていればどのような経路に沿って適用しても成立する。また、抵抗と直流電源からなる直流回路だけではなく、コンデンサやインダクタンス（コイル）を含む交流回路においても、交流的な抵抗に相当するインピーダンスを用いれば、直流回路と同様に適用できる。

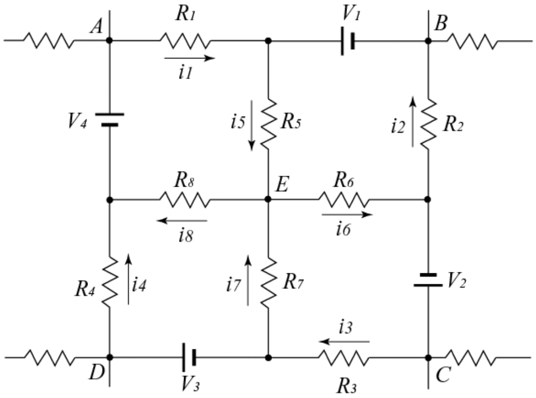


図 1-7

1.4 電力

一般に電位差 V の回路に電流 I が流れると、その回路では電気エネルギーが消費され、電力 P（単位はワット：[W]）は、$P = IV$ で表される。オームの法則より、

$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (9)$$

と書ける。

【例題 1-3】

図 1-8 の回路において、内部抵抗 r、起電力 V の電源に抵抗 R が接続されている。R で消費される電力を最大にするための条件を求めよ。

(解答 1-3)

回路に流れる電流 I は

$$I = \frac{V}{r + R}$$

となり、R の両端の電圧 V_{R} は次のようになる。

$$V_{\mathrm{R}} = \frac{R}{r + R} V$$

R において消費される電力 P は、R を流れる電流とその両端に加わる電圧の積であるので

$$P = \frac{RV}{r + R}\frac{V}{r + R} = \frac{RV^2}{(r + R)^2} = \frac{V^2}{\left(\dfrac{r}{\sqrt{R}} + \sqrt{R}\right)^2}$$

これが最大になるのは、$\sqrt{R} = \dfrac{r}{\sqrt{R}}$ すなわち、$R = r$ の場合である。

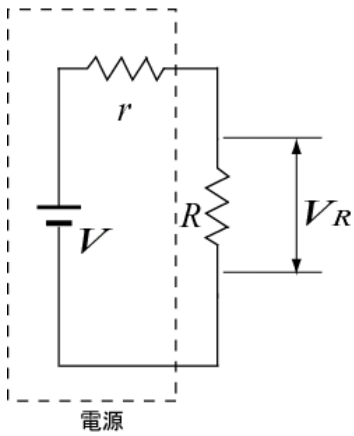


図 1-8 電源と内部抵抗 r

すなわち、負荷抵抗で最大の電力を得るためには、負荷抵抗と電源の内部抵抗を等しくする必要がある。この条件は、純粋な抵抗だけでなく、交流回路においても成立する。