

波動方程式 Wave equation

空気の弾性の式と運動方程式から

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad \text{音波の波動方程式}$$

(ダランベールの波動方程式)

$$\text{音速 } c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho}} \quad \text{大気圧 } P_0、\text{比熱比 } \gamma、\text{密度 } \rho$$

調和振動のとき(角周波数 ω): ヘルムホルツの波動方程式

In the case of harmonic vibration (sinusoidal vibration):

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} j\omega p = -\gamma P_0 \operatorname{div} \mathbf{v} \\ \operatorname{grad} p = -j\omega \rho \mathbf{v} \end{array} \right.$$

波数 $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\mathbf{v} \equiv -\operatorname{grad} \phi$$

速度ポテンシャル
Velocity potential

$$\text{粒子速度 } \mathbf{v} = \frac{j}{\omega \rho} \operatorname{grad} p$$

Particle velocity

空気の弾性の式 Elastic property of air

$$p = -\gamma P_0 \text{div} \mathbf{u} \quad (\text{線形化, Linearized})$$

1. 断熱変化 $PV^\gamma = \text{const.}$ adiabatic process

$$P_0 V_0^\gamma = (P_0 + p)(V_0 + \Delta V)^\gamma$$

$$\approx (P_0 + p)(V_0^\gamma + \gamma V_0^{\gamma-1} \Delta V) \quad \text{近似 Approx.}$$

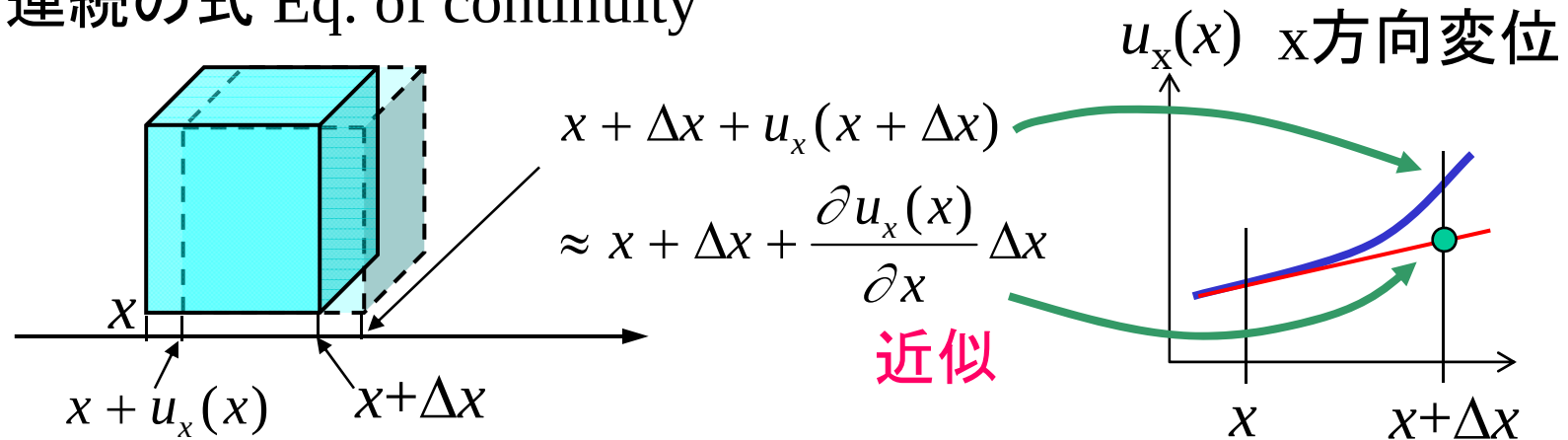
$$= P_0 V_0^\gamma + \underbrace{P_0 \gamma V_0^{\gamma-1} \Delta V}_{\text{0}} + p V_0 \gamma + \underbrace{p \gamma V_0^{\gamma-1} \Delta V}_{\text{近似}}$$

$$\therefore \frac{p}{P_0} = -\gamma \frac{\Delta V}{V_0} \quad (\text{線形化された!})$$

Approx.

$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \text{空気の比熱比} \text{ ratio of specific heat} \\ P_0 = \text{大気圧} \text{ atmospheric pressure, } p = \text{音圧} \text{ sound pressure} \\ V_0 = \text{元の体積} \text{ initial volume, } \Delta V = \text{体積変化} \text{ change in volume} \end{array} \right.$

2. 連続の式 Eq. of continuity

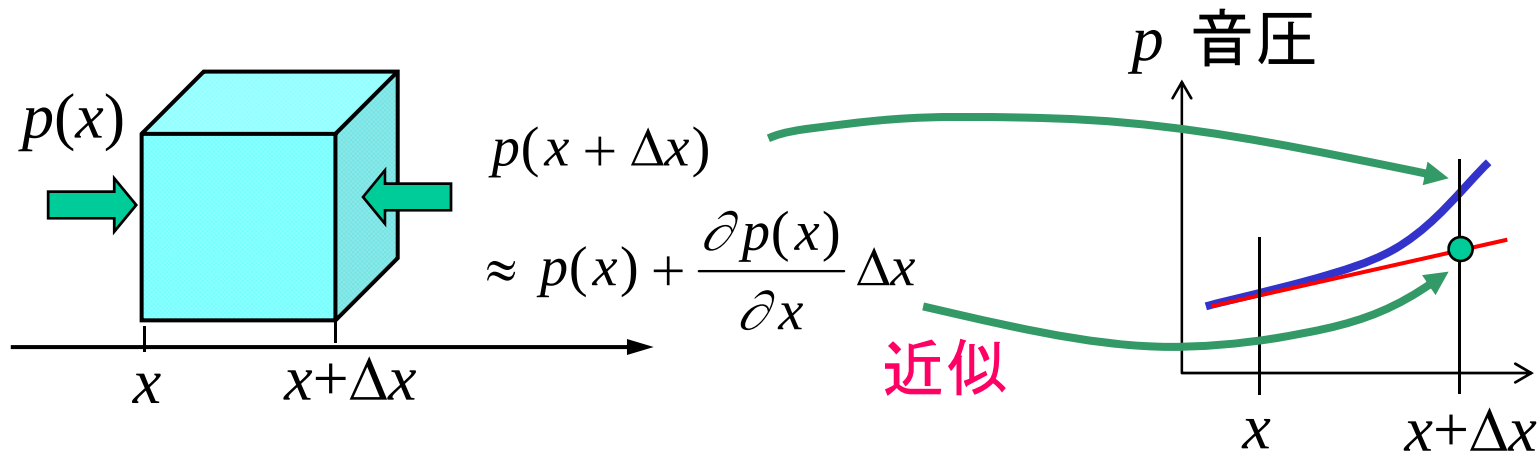


$$\begin{aligned}
 V_0 + \Delta V &= \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\Delta x \cdot \left(1 + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\Delta y \cdot \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\Delta z \\
 &\approx \Delta x \Delta y \Delta z + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z \quad \text{近似} \\
 &= V_0 + V_0 \text{div} \mathbf{u}
 \end{aligned}$$

$\Delta V = V_0 \text{div} \mathbf{u}$	(線形化された！) Linearized!
--	--------------------------

運動方程式 Equation of motion

$$\text{grad } p = -\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$



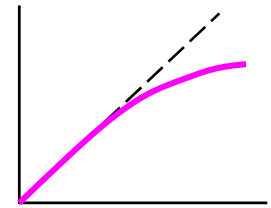
参考： 流体の方程式 Equation for fluid

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}_{\text{非線形項}} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

Non-linear term

非線形現象 Non-linear phenomena

自然だけれども、普通ではない現象 Natural, but unusual
非線形＝「2つの量が比例関係にない」

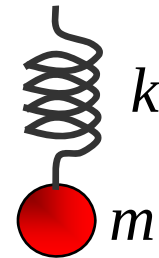


非線形の要因は2つ
Two aspects in non-linearity

- 1. 媒質が非線形 Nonlinearity of media
- 2. 「場(方程式)」が非線形
Nonlinearity of equation

波動方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ 媒質のバネの式 } f = kx \\ 2. \text{ 運動方程式 } m \frac{dv}{dt} = f \end{array} \right.$$



空中の音の場合

1. 空気のバネ性(気体の式、連続の式) : 媒質の非線形
2. 運動方程式 : 場の非線形

媒質の弾性が線形でないと？

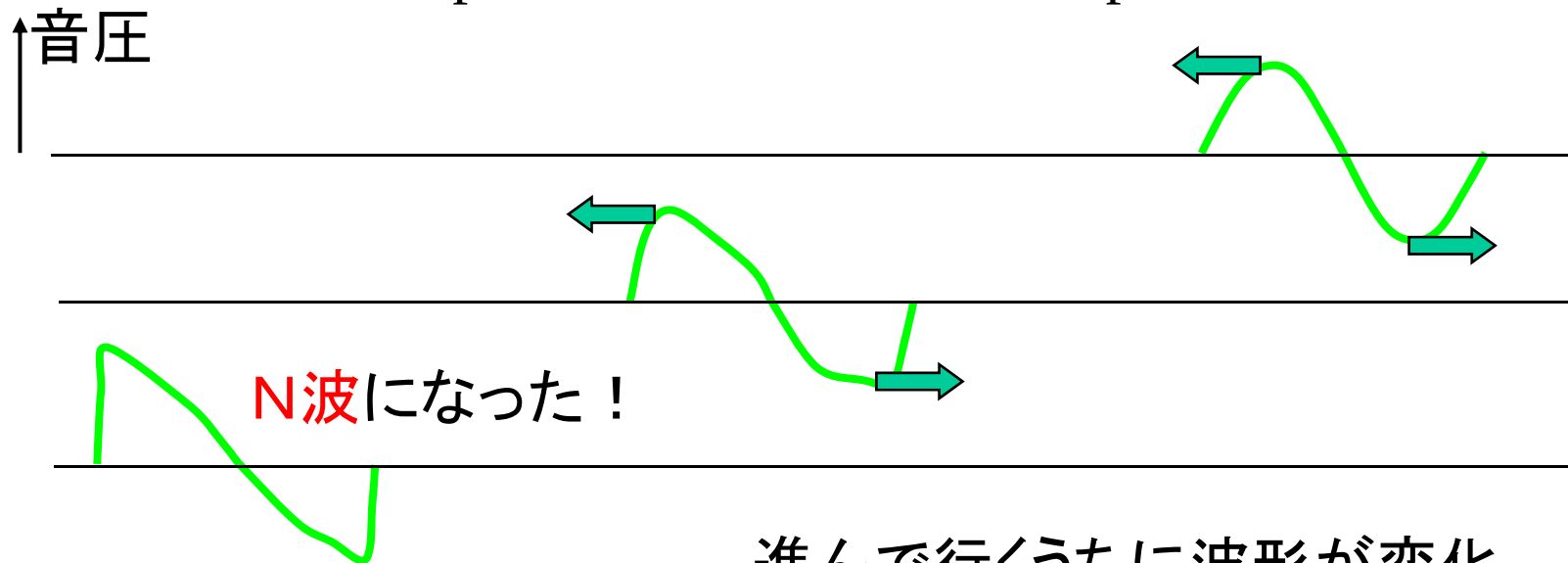
What will happen if nonlinear?

圧力が高い瞬間＝音速が速い

圧力が低い瞬間＝音速が遅い

High pressure $\rightarrow$ Large sound speed

Low pressure $\rightarrow$ Small sound speed



Distorted into
N-wave

進んで行くうちに波形が変化

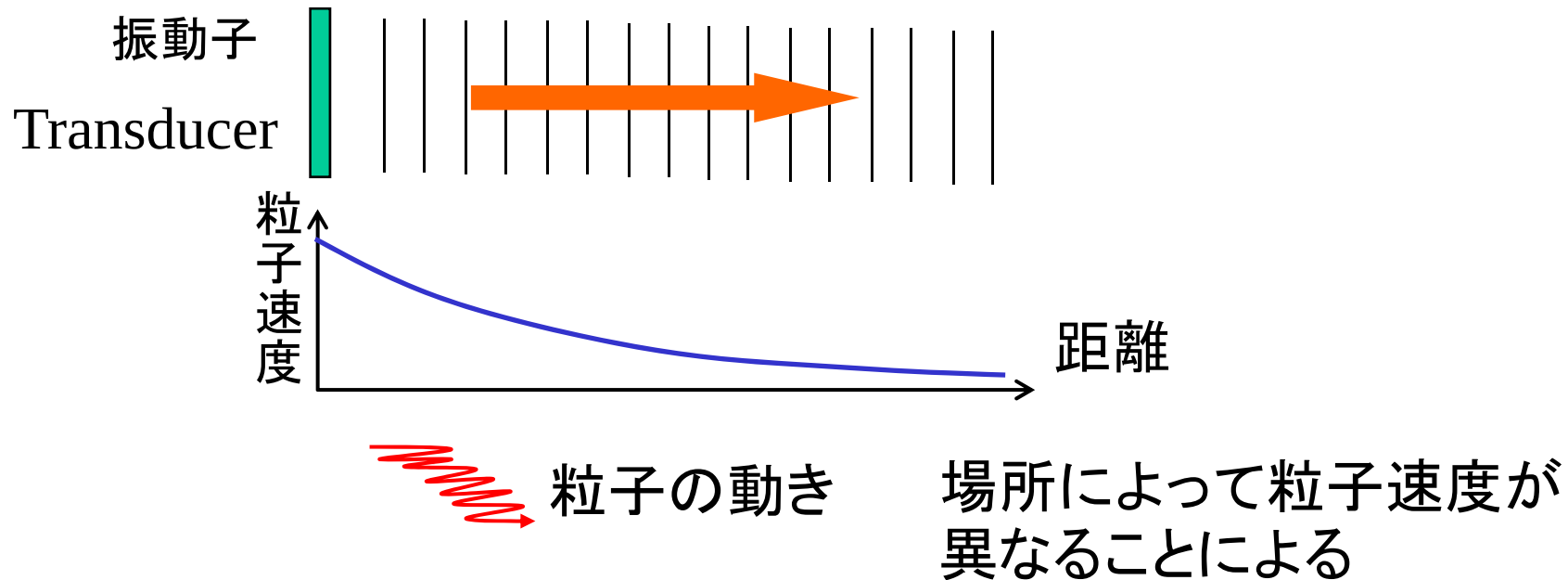
$120 \text{ dB} > p$

非線形項があると何が起こる？

What will happen if nonlinear?

音響流Acoustic Streaming(水晶風)

減衰音場＝音の進む方向に媒質が流れる。



直流的な流れが発生

Static flow is generated in addition to the vibratory motion of sound

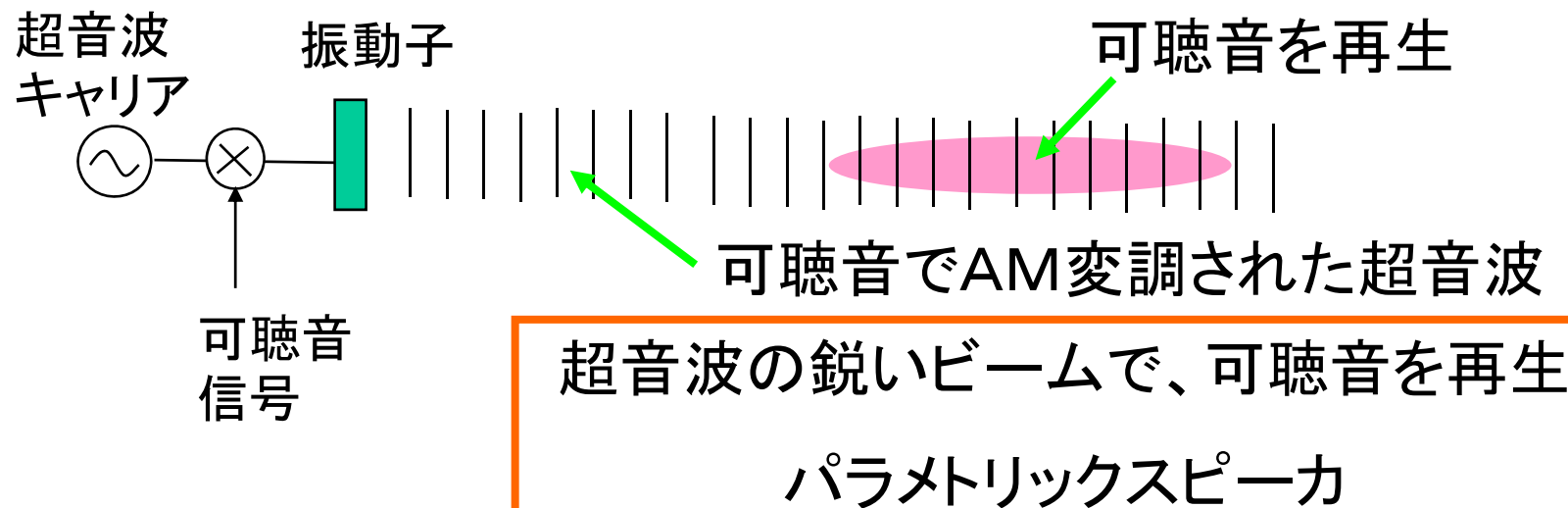
非線形現象の利用 Applications of nonlinearity

非線形＝2乗の項を考える

- 和周波、差周波、高調波の発生

$$\begin{aligned}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)^2 &= \cos^2 \omega_1 t + 2 \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t + \cos^2 \omega_2 t \\&= \frac{1}{2} \left[(1 + \cos 2\underline{\omega_1 t}) + 2 \cos(\underline{\omega_1 - \omega_2} t) + 2 \cos(\underline{\omega_1 + \omega_2} t) + (1 + \cos 2\underline{\omega_2 t}) \right]\end{aligned}$$

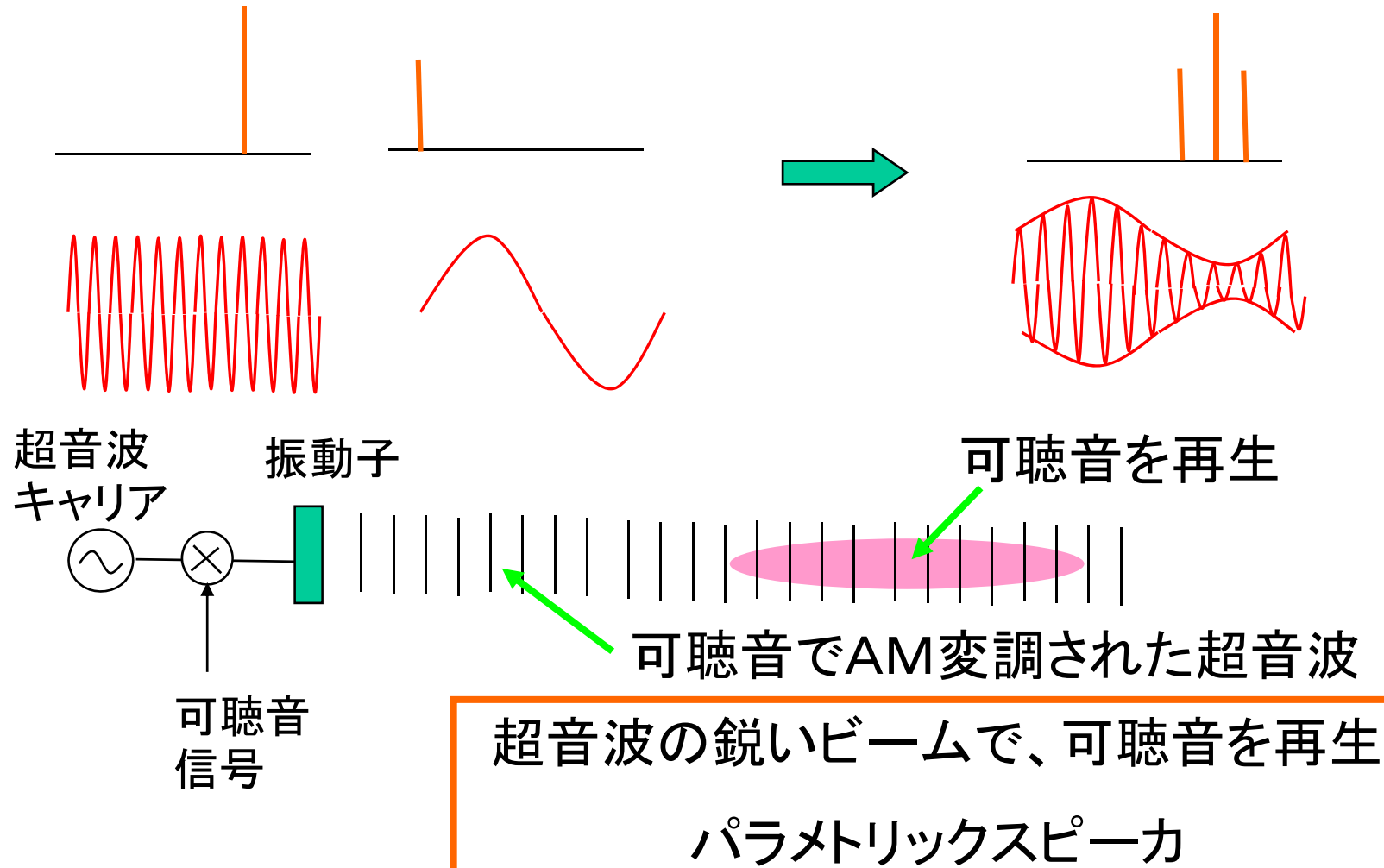
- AM変調波の復調（2乗検波）



非線形現象の利用 パラメトリックスピーカ

Parametric speaker

- AM変調波の復調（2乗検波）



非線形現象の利用 パラメトリックスピーカ

Analogy of array-speaker (End-fire array)

