細棒の縦波の調和解 Harmonic waves in thin rods

調和振動を仮定した波動方程式

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + k^2 v(x) = 0$$

Wave number

波数 $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

波動方程式の解

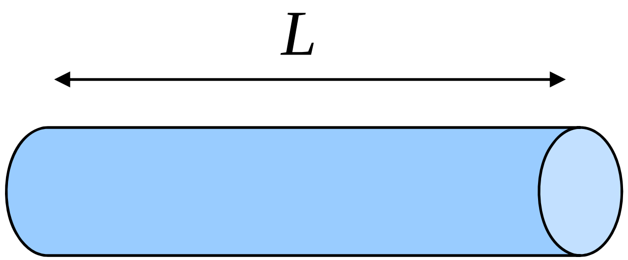
$$v(x) = V_+ e^{-jkx} + V_- e^{jkx}$$

$$F(x) = ZV_+ e^{-jkx} - ZV_- e^{jkx}$$

音響インピーダンス

$$Z = S\sqrt{\rho E}$$

Acoustic impedance



Boundary condition

Free-free

両端自由の細棒の共振

$F(0) = F(L) = 0$ 境界条件

Boundary conditions

$\sin kL = 0$ 周波数方程式

Frequency equation

$L = \lambda/2,\ \lambda,\ 3\lambda/2 \cdots$

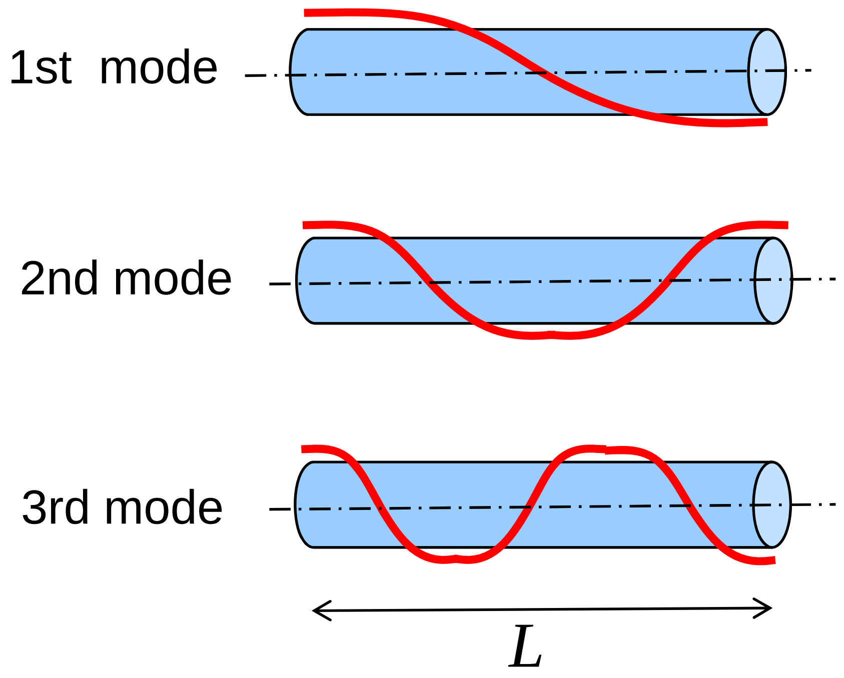
細棒の縦波の調和解 Harmonic waves in thin rods

両端自由の細棒の共振

$$F(0) = F(L) = 0$$ 境界条件 Boundary conditions

$$\sin kL = 0$$ 周波数方程式 Frequency equation

$$2\pi f \sqrt{\frac{\rho}{E}} L = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$$



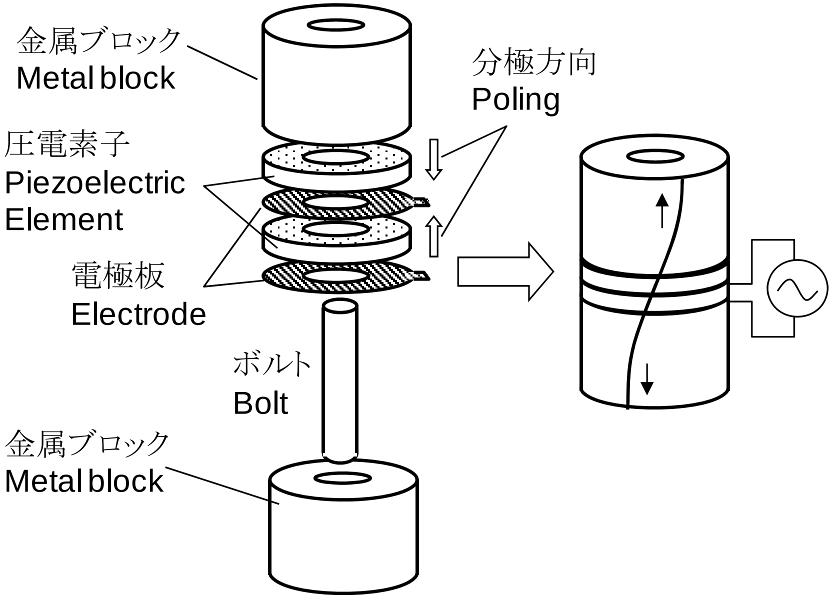
$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

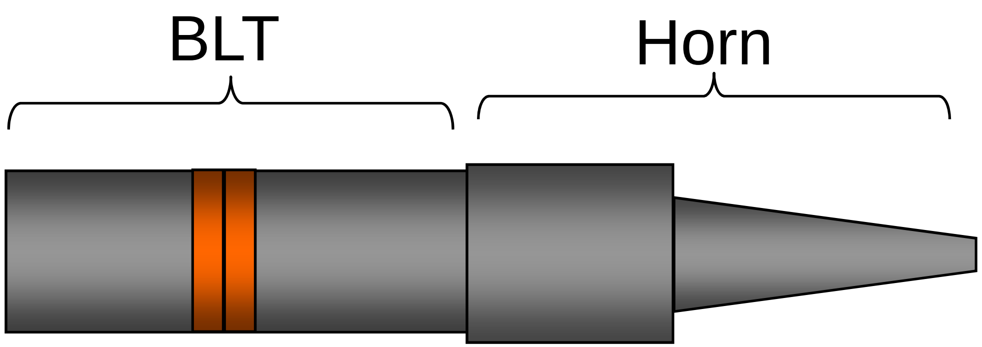
$$f_2 = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$f_3 = \frac{3}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

実際の振動系は？

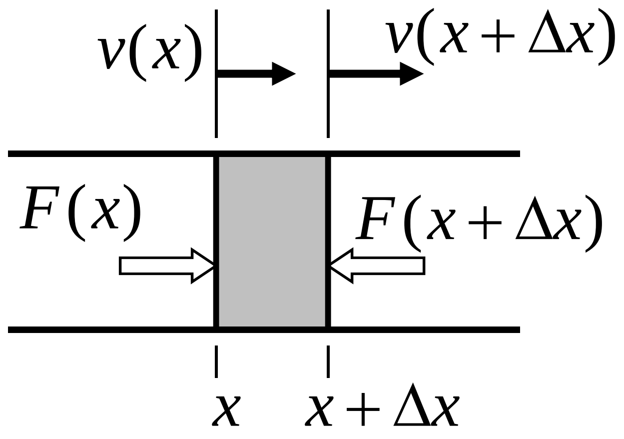
Bolt-clamped Langevin Transducer





細棒の縦振動の行列表示（等価送電線理論）1

Matrix modeling of longitudinal vibration in a thin rod
----Transmission line theory



- 力 force $F(x)$
- 速度 velocity $v(x)$
- ヤング率 Young’s modulus E
- 密度 density ρ
- 断面積 cross-section S

基本式（弾性の式＋運動方程式）

Basic equations: equations of elasticity and motion

$$
\begin{cases}
\dfrac{ES}{j\omega}\dfrac{d}{dx}v(x) = -F(x) \\[2ex]
j\omega\rho S v(x) = -\dfrac{d}{dx}F(x)
\end{cases}
$$

細棒の縦振動の行列表示(等価送電線理論)２

Matrix modeling of longitudinal vibration in a thin rod

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\omega^2\frac{\rho}{E}v^2=0$$

$$c^2=\frac{E}{\rho},\quad \omega=kc$$

縦波速度

Wave number

縦波速度 Velocity for longitudinal wave

$$\frac{d^2v}{dx^2}+k^2v^2=0$$

（波動方程式 Wave Equation ）

これの解は・・・ Solution for the wave equation

$$v(x)=V_+e^{-jkx}+V_-e^{jkx}$$

基本式より

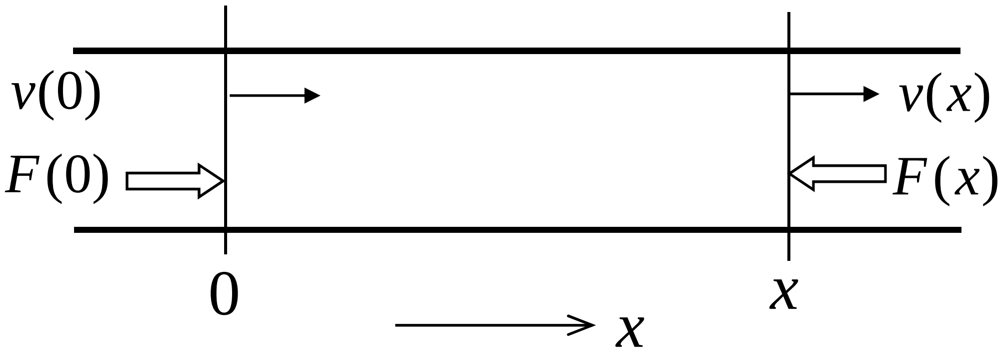
$$F(x)=-\frac{ES}{j\omega}\frac{dv}{dx}=ZV_+e^{-jkx}-ZV_-e^{jkx}$$

$$Z=S\sqrt{\rho E}$$

（音響インピーダンス Acoustic impedance）

細棒の縦振動の行列表示（等価送電線理論）３

Matrix modeling of longitudinal vibration in a thin rod



$$\begin{cases} F(0) = ZV_+ - ZV_- \\ v(0) = V_+ + V_- \end{cases}$$

or

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z & -Z \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_+ \\ V_- \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_+ \\ V_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2Z} \begin{pmatrix} 1 & Z \\ -1 & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(0) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ze^{-jkx} & -Ze^{jkx} \\ e^{-jkx} & e^{jkx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_+ \\ V_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2Z} \begin{pmatrix} Ze^{-jkx} & -Ze^{jkx} \\ e^{-jkx} & e^{jkx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z \\ -1 & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(0) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

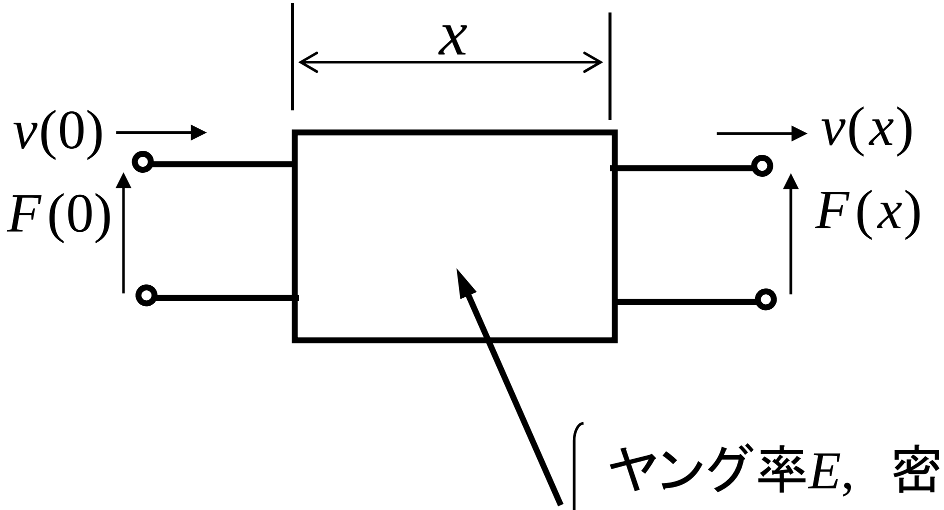
細棒の縦振動の行列表示(等価送電線理論)4

Matrix modeling of longitudinal vibration in a thin rod

$$\begin{pmatrix} F(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos kx & -jZ\sin kx \\ -\dfrac{j}{Z}\sin kx & \cos kx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(0) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

行列表示（K行列）

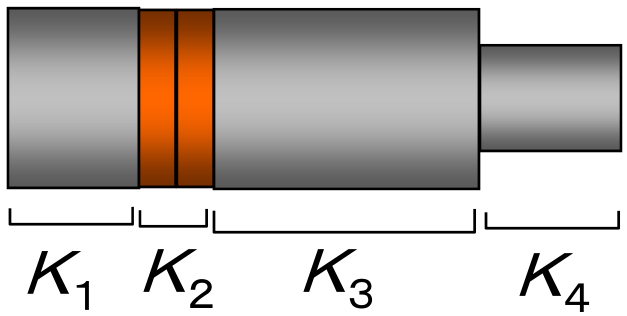
Matrix expression (K-matrix)



ヤング率E, 密度ρ,

断面積S, 周波数ω(波数k)

Procedure of analysis



共振周波数は？ Resonance frequency?

振動分布は？ Vibration distribution?

等価回路は？ Equivalent circuit?

1．4つの部分に分け、それぞれのK行列を作る。 Divide into four parts.

2．4つの行列の積の行列を計算する。 Calculate the product

3．両端自由（両端で力＝0）の条件から共振周波数を求める。Fine freq.

4．行列を用いて、振動分布を出す。 Calculate the vibration distributions

（各要素の境での力と振動速度）

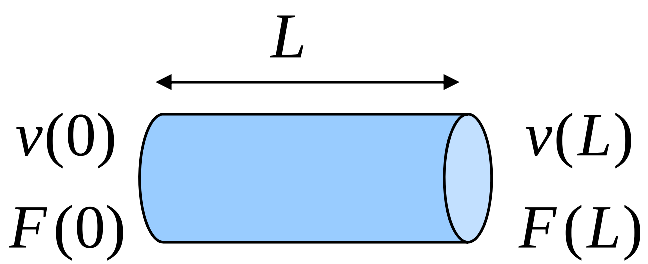
5．力の変成比がわかる。 Fine the transformation ratio.

縦続行列による解析 Analysis based on K-matrix

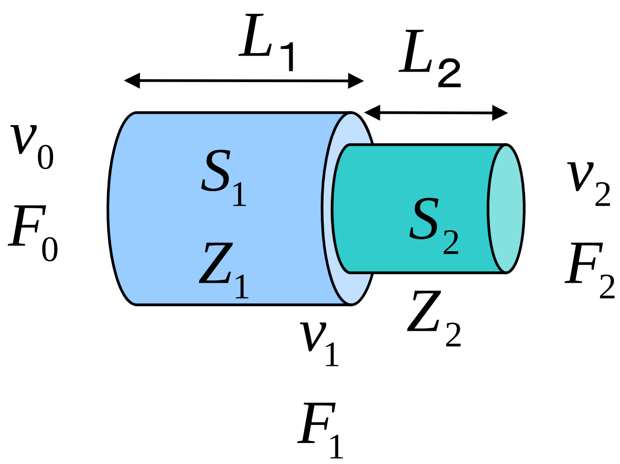
波動方程式の解

Solution for
wave equation

$$v(x) = V_+ e^{-jkx} + V_- e^{jkx}$$
$$F(x) = ZV_+ e^{-jkx} - ZV_- e^{jkx}$$



$$\begin{pmatrix} F(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos kL & jZ\sin kL \\ \dfrac{j}{Z}\sin kL & \cos kL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(L) \\ v(L) \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} F_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k_1 L_1 & jZ_1 \sin k_1 L_1 \\ \dfrac{j}{Z_1}\sin k_1 L_1 & \cos k_1 L_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k_2 L_2 & jZ_2 \sin k_2 L_2 \\ \dfrac{j}{Z_2}\sin k_2 L_2 & \cos k_2 L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = K_1 K_2 \begin{pmatrix} F_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

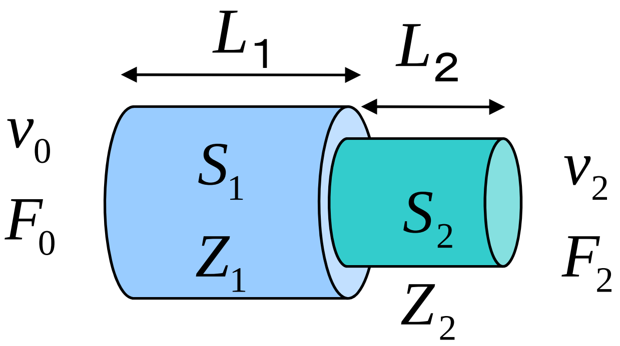
各要素の行列を求め、それらを掛け合わせれば
全体の行列が得られる。

Matrix for whole system is composed of each
matrix for each unit.

ステップホーンの速度変成比 v_2/v_0

Transformation factor for stepped horn

長さ1/4波長の断面積の異なる棒を接続したものがステップホーン。普通、材質は同じで、１本の棒から削り出して作る。



Stepped horn consists of two ¼-wavelength rods with different cross sections and the same material.

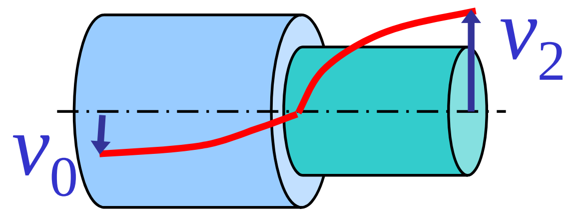
$$\begin{cases} L_1 = L_2 = \lambda/4 \qquad Z_1 = S_1\sqrt{\rho E},\ Z_2 = S_2\sqrt{\rho E} \\ \text{両端自由 free-free condition} \qquad F_0 = F_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2 \begin{pmatrix} F_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & jZ_1 \\ \dfrac{j}{Z_1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & jZ_2 \\ \dfrac{j}{Z_2} & 0 \end{pmatrix}$$

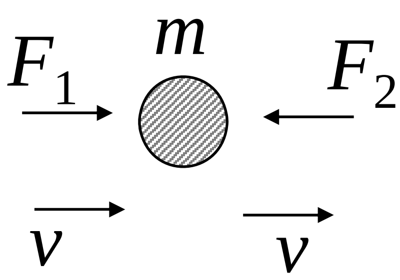
従って
$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Z_1/Z_2 & 0 \\ 0 & -Z_2/Z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{v_2}{v_0} = -\frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{S_1}{S_2}}$$

速度変成比は面積の逆比



質点のK行列 K-matrix for a mass



質点は変形しないので、両端で速度は同じ。

Mass never deforms, the velocity is same at the both ends

力の差に比例した加速度が生じる。

Acceleration is proportional to the differential of the force.

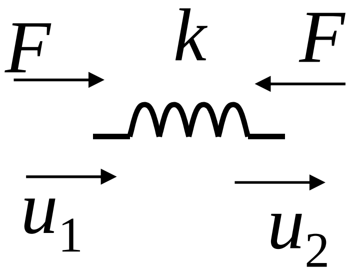
$$j\omega mv = F_1 - F_2$$

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -j\omega m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} F_2 = F_1 - j\omega mv \\ v = v \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j\omega m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ v \end{pmatrix}$$

ばねのK行列 K-matrix for a spring



質量の無いばね。Spring without mass

変位の差に比例した力。

Force proportional to the differential of the displacement

$$k\left(u_1 - u_2\right) = F$$

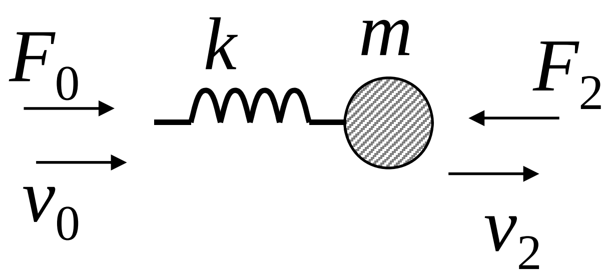
$$v_1 - v_2 = \frac{j\omega}{k} F$$

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{v_1}{j\omega} \\ u_2 = \dfrac{v_2}{j\omega} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} F \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{j\omega}{k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{j\omega}{k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ v_2 \end{pmatrix}$$

質点とばねの接続 Connection of a mass and a spring



$$\begin{pmatrix} F_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{j\omega}{k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j\omega m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

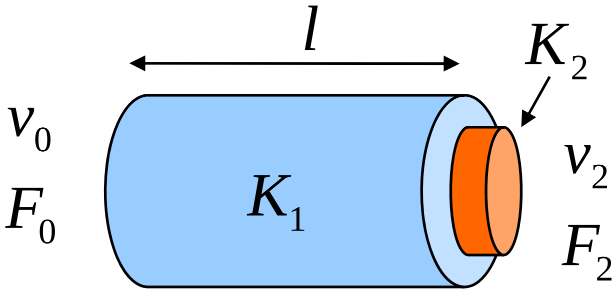
$$\begin{pmatrix} F_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j\omega m \\ \dfrac{j\omega}{k} & 1-\omega^2 \dfrac{m}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

ばね端固定、質点自由（ばね振子）

Spring fixed at one end, free mass --- Harmonic oscillator

$$\begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j\omega m \\ \dfrac{j\omega}{k} & 1-\omega^2 \dfrac{m}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \Longrightarrow \omega^2 = \frac{k}{m}$$

質量mが端部にある棒(1/2) Rod with a mass at the end



両端自由 $F_0 = F_2 = 0$

Free-free condition

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2 \begin{pmatrix} F_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} \cos kl & jZ\sin kl \\ \dfrac{j}{Z}\sin kl & \cos kl \end{pmatrix} \qquad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 & j\omega m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos kl & j\omega m\cos kl + jZ\sin kl \\ \dfrac{j}{Z}\sin kl & -\dfrac{\omega m}{Z}\sin kl + \cos kl \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

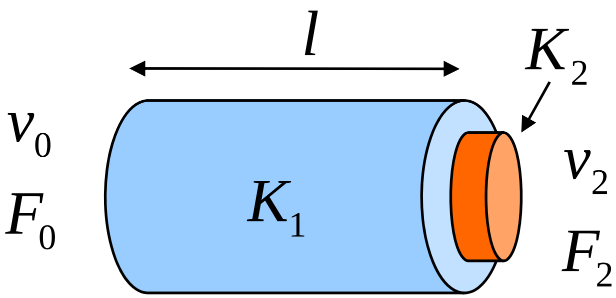
$$\omega m\cos kl + Z\sin kl = 0$$

このときの棒の長さlは半波長より少し(Δl)短くなるとする。

Assuming that the rod is shorter than half wavelength by a small quantity of Δl,

$$l = \frac{\lambda}{2} - \Delta l$$

質量mが端部にある棒(2/2) Rod with a mass at the end



両端自由　$F_0 = F_2 = 0$

$$\cos kl = \cos(k\frac{\lambda}{2} - \Delta l) = -\cos k\Delta l \approx -1$$

$$\sin kl = \sin(k\frac{\lambda}{2} - \Delta l) = \sin k\Delta l \approx k\Delta l$$

$$\because \begin{array}{l} \cos(k\frac{\lambda}{2} - \Delta l) = \cos k\frac{\lambda}{2}\cos k\Delta l + \sin k\frac{\lambda}{2}\sin k\Delta l \\ \sin(k\frac{\lambda}{2} - \Delta l) = \sin k\frac{\lambda}{2}\cos k\Delta l - \cos k\frac{\lambda}{2}\sin k\Delta l \end{array}$$

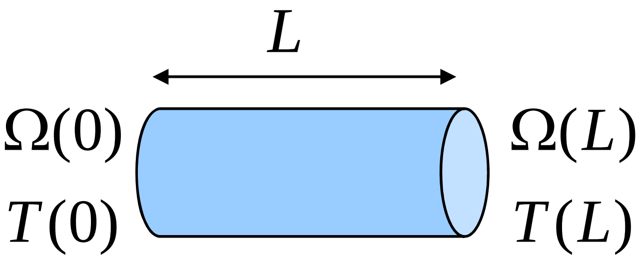
$\omega m \cos kl + Z \sin kl = 0$　は結局、$\omega m = Zk\Delta l$

$k = \dfrac{\omega}{c}$　　$Z = \rho S$　であるので、$\boxed{m = \rho S\Delta l}$

つまり、付加した質量に相当する分だけ棒を短くすればよい。

The rod should be shortened by the length equivalent to the mass attached to the end.

ねじり振動の縦続行列 K-matrix for torsional vibrations



$$\begin{pmatrix} T(L) \\ \Omega(L) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos kL & -jZ\sin kL \\ -\dfrac{j}{Z}\sin kL & \cos kL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(0) \\ \Omega(0) \end{pmatrix}$$

縦振動の力F、速度vを、トルクT、角速度Ωに対応させる。

Force F and velocity v in longitudinal vibration are to be replaced by torque T and angular velocity Ω.

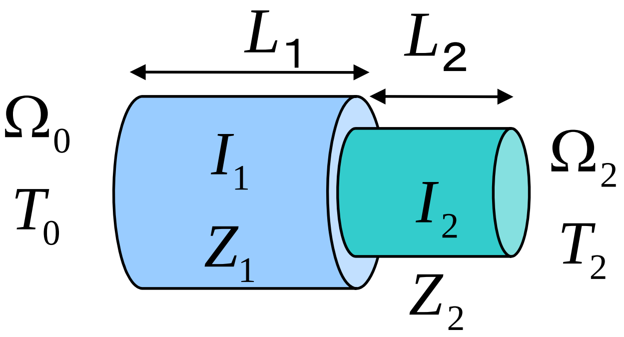
ただし、波数kとインピーダンスZは、

Here, wave number k and acoustic impedance Z are

$$\begin{cases} k = \omega\sqrt{\dfrac{\rho}{G}} \\ Z = I\sqrt{\rho G} \end{cases}$$

ねじり振動ステップホーンの速度変成比　Ω_2/Ω_0

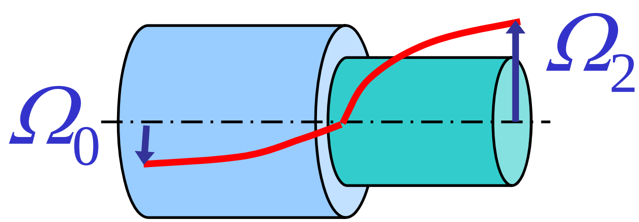
Transformation ratio of a stepped horn for torsional vibrations



$$\begin{cases} L_1 = L_2 = \lambda/4 & Z_1 = I_1\sqrt{\rho G},\ Z_2 = I_2\sqrt{\rho G} \\ \text{両端自由} & T_0 = T_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} T_0 \\ \Omega_0 \end{pmatrix} = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2 \begin{pmatrix} T_2 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & jZ_1 \\ \dfrac{j}{Z_1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & jZ_2 \\ \dfrac{j}{Z_2} & 0 \end{pmatrix}$$

従って
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Z_1/Z_2 & 0 \\ 0 & -Z_2/Z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}$$



$$\boxed{\frac{\Omega_2}{\Omega_0} = -\frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{I_1}{I_2} = -\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4}$$

角速度変成比は半径の比の4乗になる。