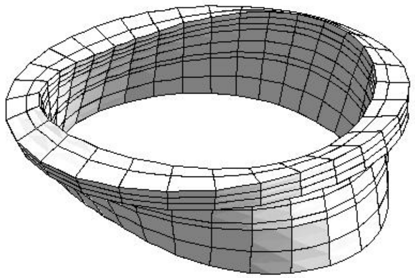
弾性振動の基礎 Basics of elastic wave motions

<u>振動解析が必要なわけ</u>　Why vibration analysis is required?



〇What are to be found from the analysis?

１）How does it vibrate? （振動モード Vibration mode）

振動変位分布　Distribution of vibration displacement amplitude

振動応力分布　Distribution of vibration stress

２）共振周波数　Resonance frequencies

３）振動速度・応力の絶対値　Vibration velocity, maximum stress

〇手法　Methods

１）解析的手法（古典的、見通しがよい） Analytic: classical,

２）数値的手法（FEM, BEM, 差分法など）

Numerical: FEM, BEM, differential method

Knowledge in vibration theory is essential even for using commercial package software

解析の2つの道筋
Two ways for analytic solutions of elastic waves

<u>解析的手法</u> Analytic method

1. 一般論的手法 General approach

   固体の弾性の方程式＋運動方程式

   Equation for elasticity + Equation of motion

   境界条件 Boundary conditons

   →あらゆる振動に関する解が得られる。

   General solutions for various kinds of waves

2. 個別論的手法 One-by-one approach

   縦振動、たわみ振動、ねじり振動･･･など

   Solutions for specific waves such as longitudinal, flexural, torsional, etc.

弾性振動の解析 General form of the wave equation

固体中の振動　Waves in solid

:縦波、横波　Longitudinal waves and transverse waves

応力Stress＝テンソルTensor、粒子速度particle velocity＝ベクトルvector

$$\left\{\begin{array}{l}\text{音：　音圧＝スカラー、粒子速度＝ベクトル}\\ \text{電磁波：　電界＝ベクトル、磁界＝ベクトル}\end{array}\right\}$$

弾性の式＋運動方程式 ⟹ 一般的な支配方程式

General equation of wave motion　　＝弾性体の波動方程式

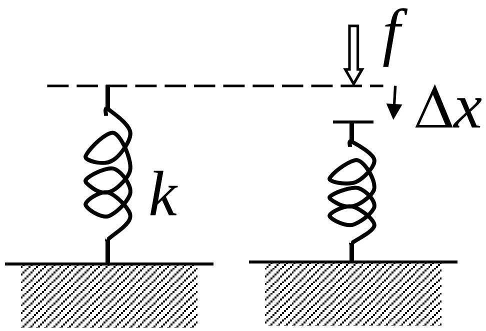
$$\left\{\begin{array}{l}\rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Delta}{\partial x}+\mu\nabla^2 u\\ \rho\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Delta}{\partial y}+\mu\nabla^2 v\\ \rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\dfrac{\partial\Delta}{\partial z}+\mu\nabla^2 w\end{array}\right.$$

密度：	ρ
ラメ定数：	$\lambda,\ \mu$
粒子速度：	$\mathbf{v}=(u,v,w)$

$$\Delta\equiv\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

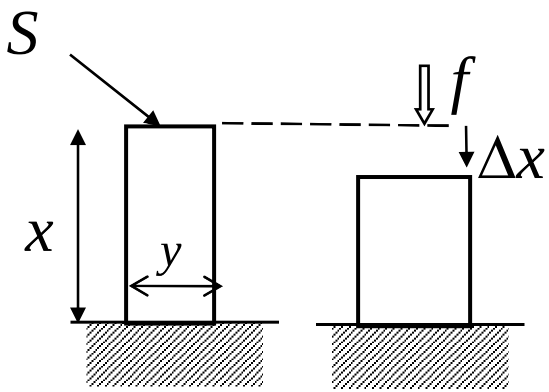
これに境界条件を入れれば全て分かる！ ⟹ でも？

弾性体の力学1 Mechanics of elastic body 1



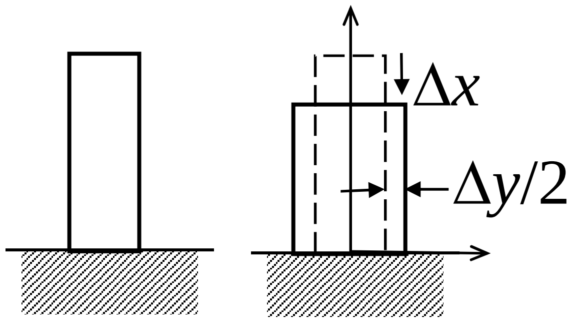
Spring constant
ばね定数

$$f = k\Delta x$$



$$\frac{f}{S} = E\frac{\Delta x}{x}$$

ヤング率Young's modulus



$$S_{xx} = \frac{\Delta x}{x}, \quad S_{yy} = \frac{\Delta y}{y}$$

ポアソン比
Poisson's ratio

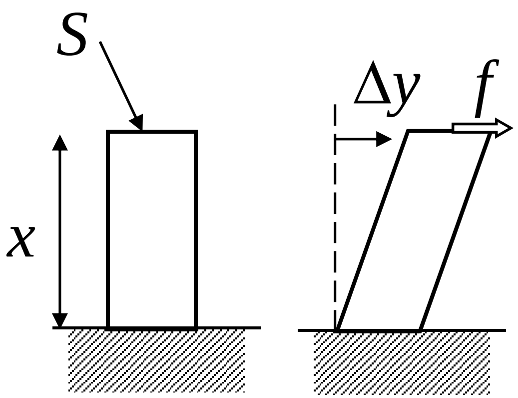
$$S_{yy} = -\sigma S_{xx}$$

$$S_{zz} = -\sigma S_{xx}$$

$$\frac{f}{S} = T_{xx}$$ 応力 stress

$$\frac{\Delta x}{x} = S_{xx}$$ ひずみ strain

弾性体の力学2 Mechanics of elastic body 2



$$\frac{f}{S} = G\frac{\Delta y}{x}$$

剛性率

Rigidity

$$T_{xy} = GS_{xy}$$

$$S_{xy} = S_{yx}$$

$$\begin{pmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{zx} \\ T_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{yz} \\ S_{zx} \\ S_{xy} \end{pmatrix}$$

応力と歪の関係

Relationships between stress and strain

弾性定数（スティッフネス）

Elastic constants (stiffness)

弾性体の力学(等方体)
Mechanics of elastic body (Isotropic medea)

弾性定数

Elastic constants

$$[c_{ij}] = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ラメ定数}\quad \lambda,\ \mu}$

Lame constant

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)} = G$$

体積弾性率

Compressive factor

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \qquad \lambda + 2\mu = \frac{(1-\sigma)E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}$$

ポアソン比

Poisson's ratio

$$\sigma = \frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)}$$

Young's modulus

$$E = \frac{9\mu K}{3K+\mu}$$

各種材料の弾性定数

例＝理科年表より

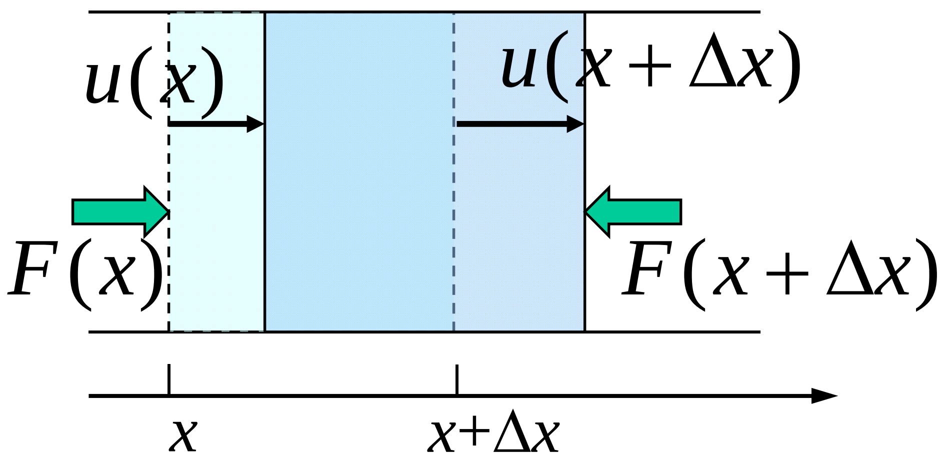
Table of elastic constants

	ヤング率 E	剛性率 G	ポアソン比 σ
鋼Steel	210	80	0.29
アルミニウムAl	70.3	26.1	0.345
ジュラルミンDurarumin	71.5	26.7	0.335
銅Cu	129.8	48.3	0.343
りん青銅Phosphoric bronze	120	43.6	0.38
しんちゅうBrass	100.6	37.3	0.350
チタンTi	115.7	43.8	0.321
ガラスGlass	71.3	29.2	0.22
溶融石英Fused-silica	73.1	31.2	0.17

単位＝GPa＝10^9N/m^2
Unit in GPa

製法によっても性質は変化する

細棒の縦波 Longitudinal waves in a thin rod



Strain
ひずみ $\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$

Elastic
弾性の式 $F(x) = -ES\dfrac{\partial u(x)}{\partial x}$

E, ヤング率； S, 断面積

ρ, 密度

$F(x)-F(x+\Delta x)$ 微小領域に働く力

$\rho S\Delta x$ 微小領域の質量

運動方程式 $\rho S\dfrac{\partial v(x)}{\partial t} = -\dfrac{\partial F(x)}{\partial x}$

振動速度 $v(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial t}$

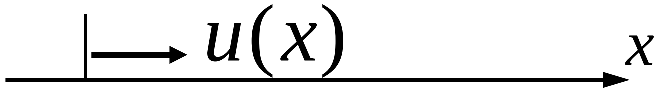
波動方程式 $$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 v(x)}{\partial t^2}$$

Wave equation

細棒の縦波音速 $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

Sound speed

1次元縦振動 One-dimensional longitudinal waves



$$v = w = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

密度: ρ

ラメ定数: $\lambda,\ \mu$

粒子速度: $\mathbf{v} = (u, v, w)$

$$\Delta \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\left.\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \\
\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \\
\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu)\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

波動方程式 Wave equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

1次元縦波音速

Sound speed

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

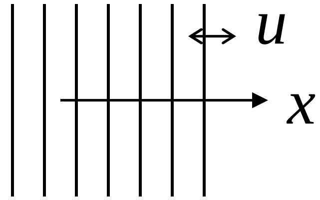
２つの縦振動の比較 Comparison between two waves

１）１次元縦波（無限媒質中の平面波） One-dimensional longitudinal

$$c_d = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

縦波音速

Sound speed



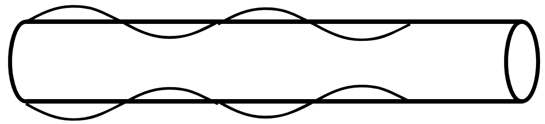
２）<u>細棒</u>中の縦波........厳密には縦波＋横波 （Ｐ＋ＳＶ波）

Longitudinal waves in a thin rod → P+SV waves

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

細棒の縦波音速

Sound speed in a thin rod



σ=1/3として C_d の方が C_0 より20%速い

- 細棒ではポアソン比による横方向変位がある。
- 無限媒質中では横方向に動けず、硬く見える。
- 太くなると…..Pochhammer-Chree波（縦波と横波の結合、分散性）

ポアソン比

$$\lambda + 2\mu = \frac{(1-\sigma)E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}$$

ヤング率

径方向に分布　　　　（*「分散性」＝周波数によって速度が異なる）

Drill　Calculate the sound speeds for longitudinal waves.

	密度　kg/m^3	縦波音速　m/s
鋼Cu	7800	C_d=　　　C_0=
アルミニウムAl	2700	
ジュラルミンDurarumin	2800	
銅Cu	8900	
りん青銅Ph-Bronze	8800	
しんちゅうBrass	8500	
チタンTi	4400	
ガラスGlass	2500	
溶融石英Fused-silica	2200	