

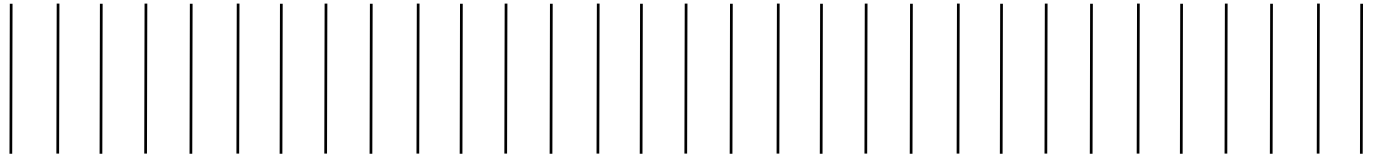
空気中の超音波

Ultrasonic waves in air

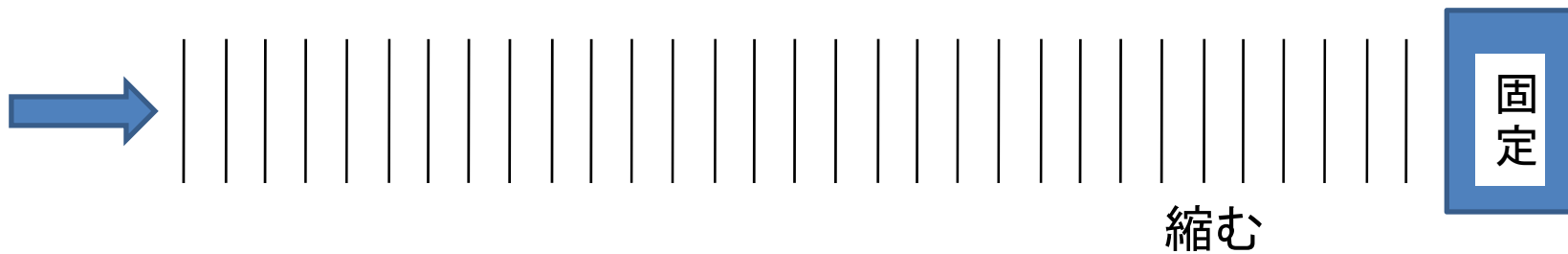
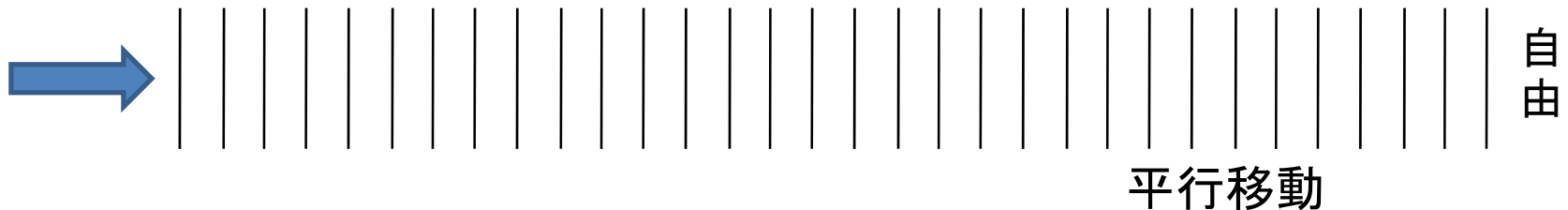
1. なぜ波動として伝わるか
2. 空気の弾性(状態方程式)と連続性(連続の式)
3. 空気の慣性(運動方程式)
4. 波動方程式の導出
5. 音速の式
6. 空気中の伝搬
7. 反射と透過
8. 放射と回折
9. 空気中の減衰
10. 水中の伝搬
11. 人間の聴覚特性

なぜ波動として伝わるのか？

空気はばねの性質をもつというが。



ゆっくり押すと……



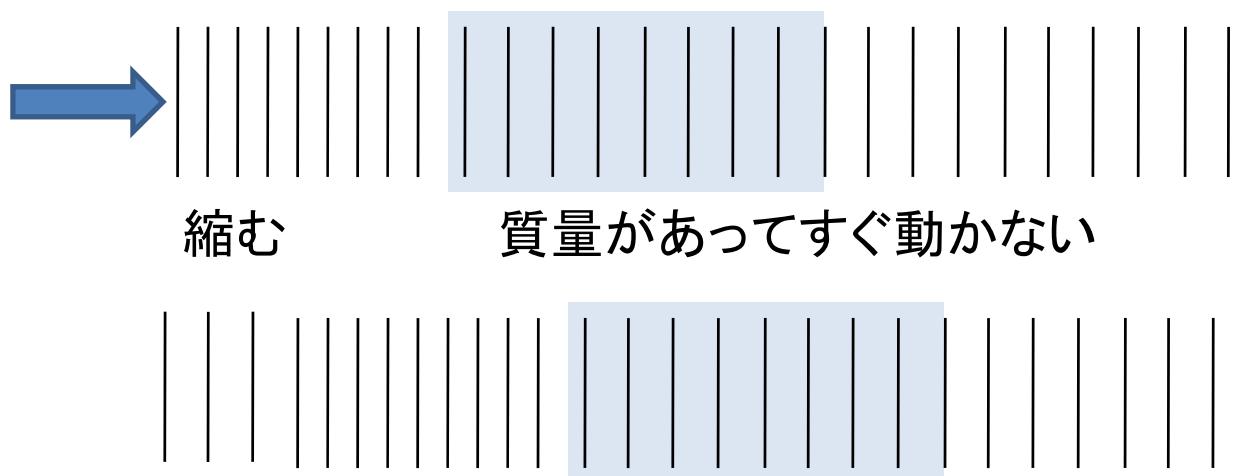
一方、空気には「質量」もある。

力を加えてもすぐには動かない。だんだん加速。

速度の変化率(=加速度)は力に比例。

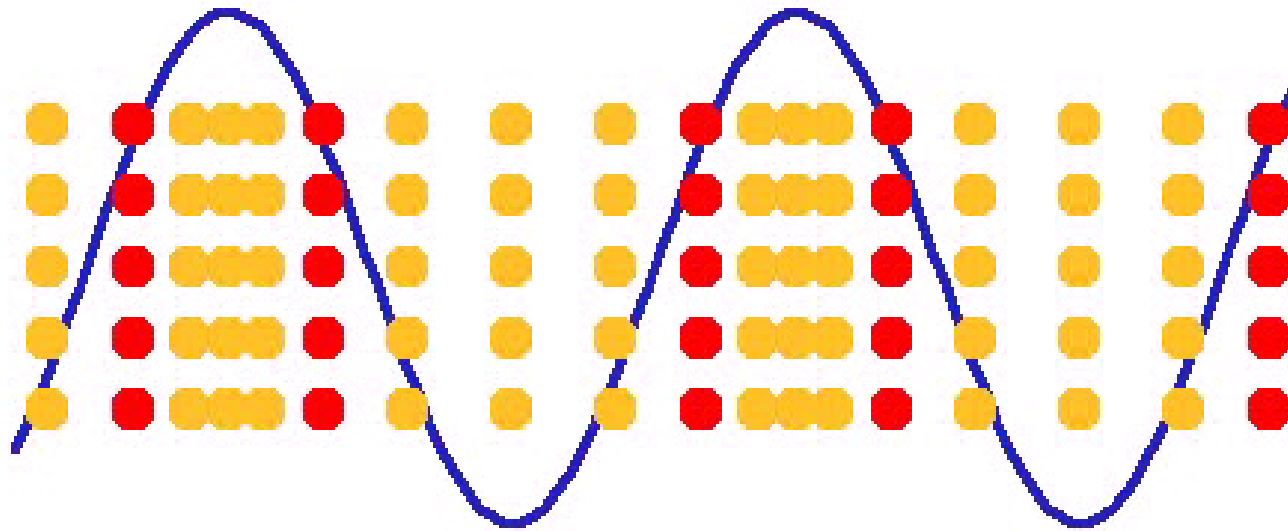
質量はその比例定数。

ぎゅっと押すと「反作用」



なぜ波動として伝わるのか？

空気の「ばね」と「質量」の性質で伝わる。



縦波： 振動方向と波の進む方向が同じ

空気の弾性の式

Elastic property of air

1. 断熱変化 $PV^\gamma = \text{const.}$

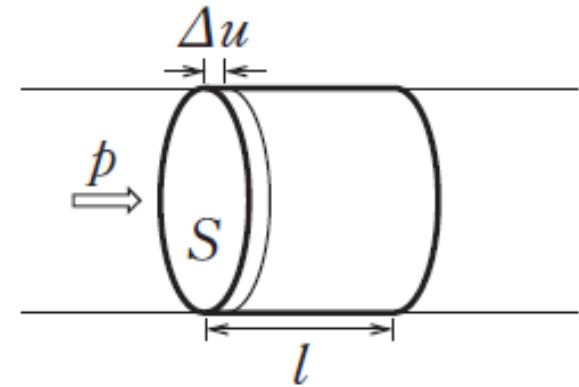
adiabatic process

$$P_0 V_0^\gamma = (P_0 + p)(V_0 + \Delta V)^\gamma$$

$$\approx (P_0 + p)(V_0^\gamma + \gamma V_0^{\gamma-1} \Delta V) \quad \text{近似 Approx.}$$

$$= P_0 V_0^\gamma + \underline{P_0 \gamma V_0^{\gamma-1} \Delta V} + \underline{p V_0^\gamma} + \underline{p \gamma V_0^{\gamma-1} \Delta V}$$

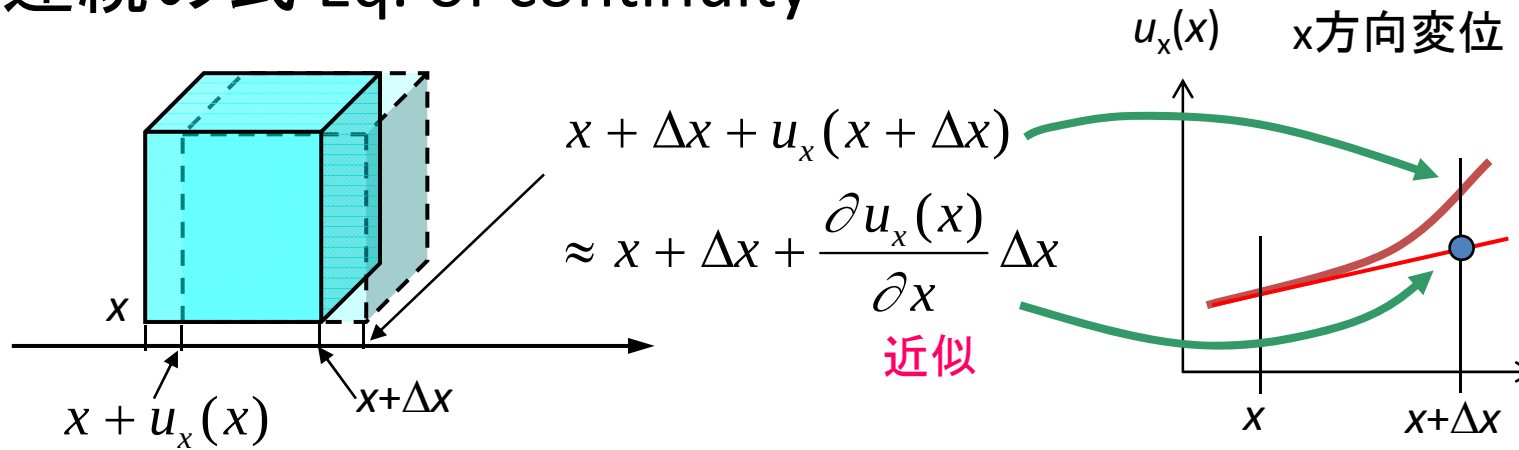
$$\therefore \frac{p}{P_0} = -\gamma \frac{\Delta V}{V_0} \quad (\text{線形化された!})$$



0
近似
Approx.

- γ = 空気の比熱比 ratio of specific heat
- P_0 = 大気圧 atmospheric pressure, p = 音圧 sound pressure
- V_0 = 元の体積 initial volume, ΔV = 体積変化 change in volume

2. 連続の式 Eq. of continuity



$$V_0 + \Delta V = \left(1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \Delta x \cdot \left(1 + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \Delta y \cdot \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \Delta z$$

$$\approx \Delta x \Delta y \Delta z + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad \text{近似}$$

$$= V_0 + V_0 \text{div} \mathbf{u}$$

$$\Delta V = V_0 \text{div} \mathbf{u}$$

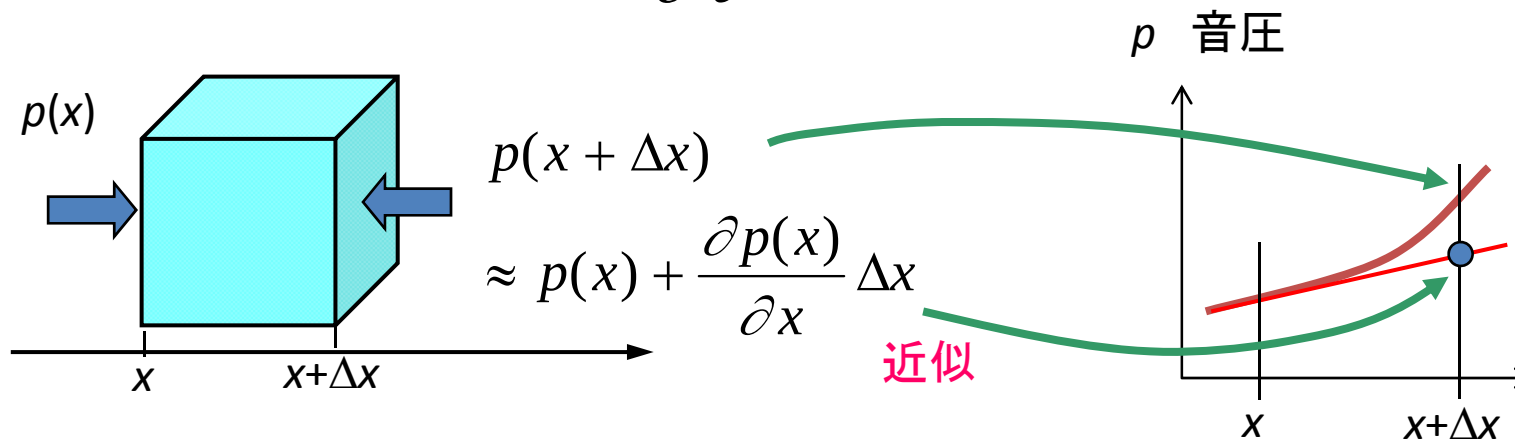
(線形化された！)

Linearized!

$$p = -\gamma P_0 \text{div} \mathbf{u} \quad (\text{線形化, Linearized})$$

運動方程式 Equation of motion

$$\text{grad } p = -\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$



参考：流体の方程式 Equation for fluid

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}}_{\text{非線形項}} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

Non-linear term

波動方程式 Wave equation

空気の弾性の式と運動方程式から

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad \text{音波の波動方程式}$$

(ダランベールの波動方程式)

音速 $c = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho}}$ 大気圧 P_0 、比熱比 γ 、密度 ρ

調和振動のとき(角周波数 ω): ヘルムホルツの波動方程式

In the case of harmonic vibration (sinusoidal vibration):

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} j\omega p = -\gamma P_0 \operatorname{div} \mathbf{v} \\ \operatorname{grad} p = -j\omega\rho\mathbf{v} \end{array} \right.$$

波数 $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

$\mathbf{v} \equiv -\operatorname{grad} \phi$
速度ポテンシャル
Velocity potential

粒子速度
Particle velocity $\mathbf{v} = \frac{j}{\omega\rho} \operatorname{grad} p$

波の進む速さ：音速

$$v = \sqrt{\frac{\text{硬さ}}{\text{質量}}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho}}$$

$$m = \rho S l, \quad k = \frac{\gamma P_0}{l} S$$

$$331.5 \sqrt{\frac{T + 273.16}{273.16}} = \underline{331.5 + 0.60 T} \quad [\text{m/s}]$$

温度
↙

音速マニアのための補足

$$331.5 \sqrt{\frac{T+273.16}{273.16}} = 331.5 + 0.60T \quad [\text{m/s}]$$

331.5？ 0.60？ そうでしたっけ？

上式右辺の温度の1次式は常温付近
(従来よく見る式は0°C付近)

- ・0°C付近では傾き0.607
- ・切片331.5は計算に使う数値で微妙に変化。

ここでは 比熱比1.403、大気圧101300Pa、密度1.293kg/m³

さまざまな気体中の音速

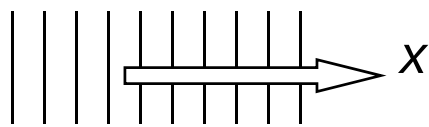
0°C付近

気体	密度(kg/m ³)	音速(m/s)
空気	1.293	331.5
水素	0.0899	1284
ヘリウム	0.1785	965
窒素	1.2506	334
酸素	1.429	316
二酸化炭素	1.977	259
メタン	0.7168	430
水蒸気(134°C)	0.6	494

波動方程式

1次元、調和波の場合

{ 平面波（管の中を進む音波、音源から遠い音波） plane wave
単一周波数の連続的な音波 single frequency, continuous



$$\frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$\frac{d^2 p}{dx^2} + k^2 p = 0$$

波数 $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ Wave number

粒子速度 $v_x = \frac{j}{\omega \rho} \frac{dp}{dx}$

Particle velocity

これを満たす解 Solution

$$p(x) = P_+ e^{-jkx} \quad \left\{ \begin{array}{l} e^{j\omega t} \text{ は省略} \quad e^{j\omega t} \text{ is not displayed.} \\ P_+ \text{ は振幅(複素数) Amplitude(complex)} \end{array} \right.$$

+x方向に進む進行波

Progressive wave in +x direction

固有音響インピーダンス

Specific acoustic impedance

粒子速度 $v_x = \frac{j}{\omega \rho} \frac{dp}{dx} = \frac{k}{\omega \rho} P_+ e^{-jkx} = \frac{1}{\rho c} P_+ e^{-jkx}$

$$z_C = \frac{p}{v_x} = \rho c$$

固有音響インピーダンス

平面波進行波で定義される！

Defined for plane waves

反射波(xの負方向に伝搬)があると・・・

In the case of reflection

$$p(x) = P_+ e^{-jkx} + P_- e^{+jkx}$$

$$r \equiv \frac{P_-}{P_+} \quad \text{音圧反射係数(複素数)}$$

Reflection coefficient (Pressure)

Complex number

例えば $r=1$ のとき

$$p(x) = 2P_+ \cos kx$$

定在波

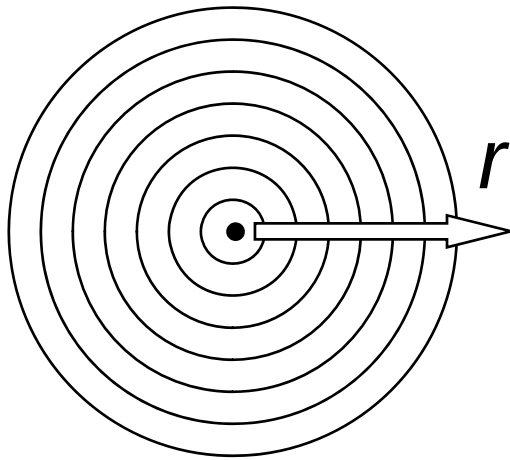
Standing wave

球面波 Spherical waves

点音源・球音源による音
四方八方に均等に伝搬

(波面＝球面)

Point source, spherical source
Uniform radiation in any direction



エネルギーが $\frac{1}{r^2}$ で減少



音圧は $\frac{1}{r}$ で減少

これを満たす解 solution

$$p(r) = \frac{1}{r} P_+ e^{-jkr}$$

+r方向に進む進行波

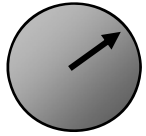
粒子速度

$$v_r = \frac{j}{\omega \rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{P_+ e^{-jkr}}{\rho c r} \left(1 + \frac{1}{jkr} \right)$$

音圧と粒子速度の位相がずれる Phase difference between pressure and velocity

遠距離 (r が大) ならば同位相 (平面波) Plane wave (in phase) in far region

球音源(呼吸球) spherical source



半径 a の球の表面が速度 u_a で半径方向に一様振動

Uniform vibration

この音源による球面波との $r=a$ における連続性より、

$$v_r(a) = u_a = \frac{P_+ e^{-jka}}{\rho c a} \left(1 + \frac{1}{jka} \right)$$

球が波長に比べて小さい ($ka \ll 1$) とき Small source

$$P_+ = j\omega\rho a^2 u_a \equiv j\omega\rho \frac{U_0}{4\pi} \left\{ \begin{array}{l} \text{体積排除量} \\ \text{音源の強さ [m}^3/\text{s]} \end{array} \right.$$

球音源による音圧

Sound pressure by a
spherical source

$$p = j\omega\rho \frac{U_0}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r}$$