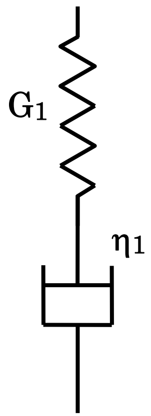
	弾性	粘性	粘弾性
微視的			
巨視的			●

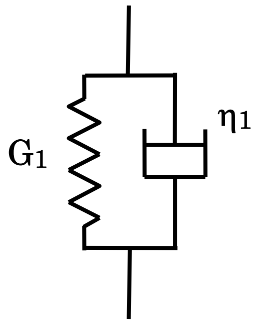
粘弾性の力学模型

バネとダッシュポットの組み合わせ

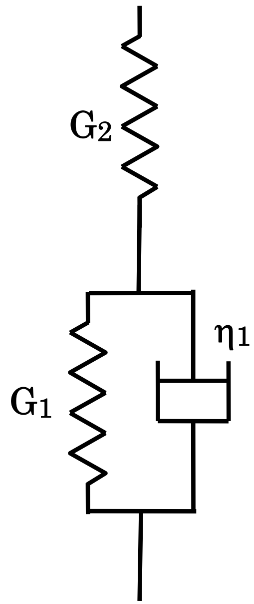
バネ:　弾性要素（ひずみ量に比例した応力）
ダッシュポット:粘性要素（ひずみ速度に比例した応力）



Maxwell モデル
応力緩和
（一定の歪みを加えると応力が徐々に減少する）
永久ひずみが残る



Voigt モデル
クリープ
（一定の応力を加えると歪が徐々に増加する）
永久ひずみは残らない



３要素モデル
永久ひずみは残らない

粘弾性モデルの基礎方程式

フォークとモデルの基礎方程式

$$\sigma = G_1\varepsilon + \eta_1 \frac{d\varepsilon}{dt}$$

ここで応力が一定とすると

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{G_1}{\eta_1}\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{G_1}\right) = 0$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{G_1}\left\{1 - \exp\left(-\frac{G_1}{\eta_1}t\right)\right\}$$

マックスウェルモデルの基礎方程式: $\dfrac{d\varepsilon}{dt} = \dfrac{1}{G_1}\dfrac{d\sigma}{dt} + \dfrac{\sigma}{\eta_1}$

ここでひずみが一定とすると

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{G_1}{\mu_1}$$

$$\sigma = G_1\varepsilon \exp\left(-\frac{G_1}{\eta_1}t\right)$$

線形粘弾性

- 弾性率の線形性と粘弾性の線形性
  線形性とは？

- Boltzmannの重ね合わせの法則
  任意の歪み履歴に対する応力履歴を
  緩和弾性率から求める.

- 周期的歪みに対する応答

緩和弾性率

一般に，弾性率＝応力／ひずみ

緩和弾性率 $G(t)=\lim_{\gamma\to 0}\frac{\sigma(t)}{\gamma}$

$G(t)=G_0\exp(-\frac{t}{\tau})$ の形のとき

$$\left.\begin{array}{ll} G_0 & :\text{瞬間弾性率} \\ \tau & :\text{緩和時間} \end{array}\right\}$$ とよぶ

一般に$G(t)$は多くの緩和時間の要素の組み合わせ

$$G(t)=\sum_p G_p\exp(-\frac{t}{\tau_p})$$

あるいは，より連続的な分布を考えると

$$G(t)=\int H(\tau)\exp\{-(t/\tau)\}d(\ln\tau)$$

$H(\tau)$: 緩和時間スペクトル

線形粘弾性

弾性率の線形性

$\gamma_1 \to \sigma_1$

$\gamma_2 \to \sigma_2$ のとき

$\gamma_1 + \gamma_2 \to \sigma_1 + \sigma_2$ となれば

弾性率に線形性があると言える.

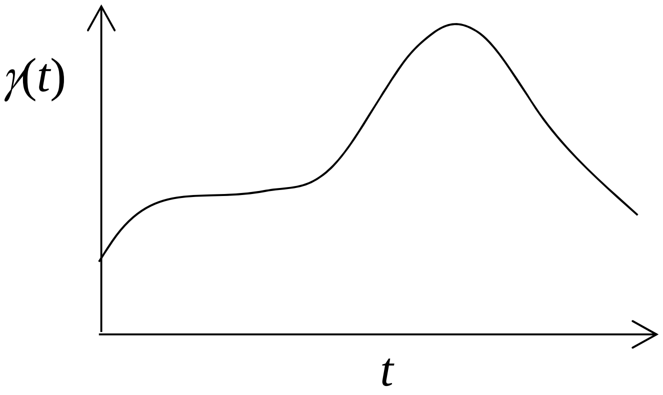
粘弾性の線形性

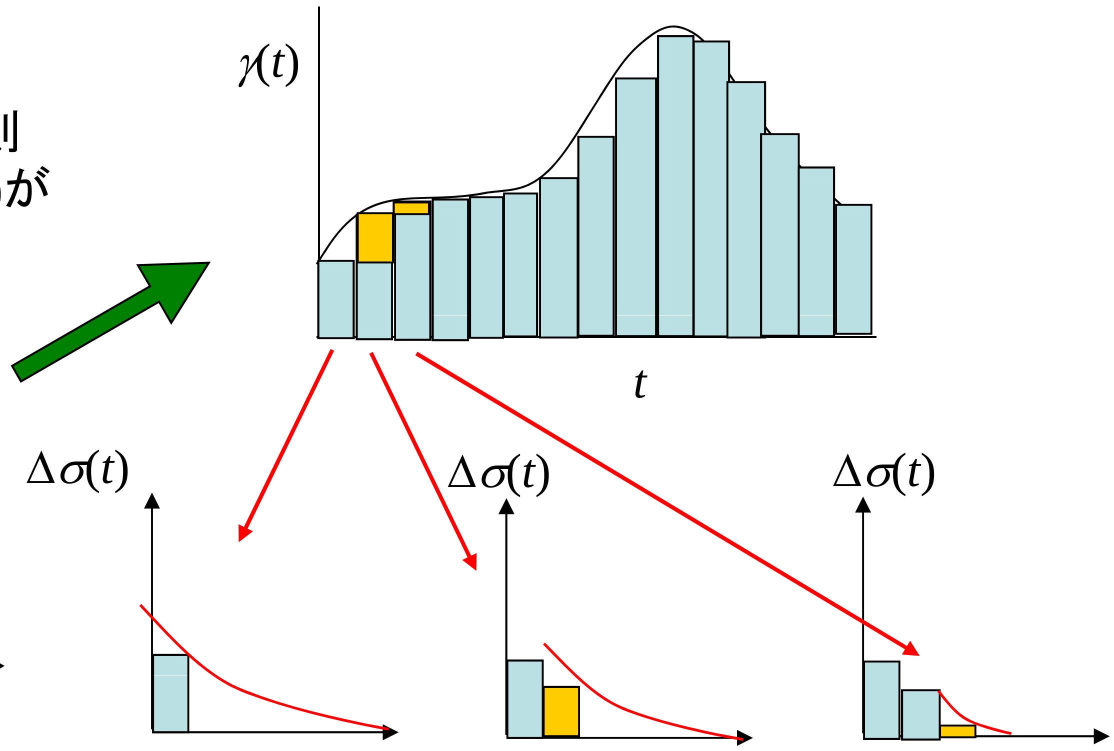
$\gamma_1(t) \to \sigma_1(t)$

$\gamma_2(t) \to \sigma_2(t)$ のとき

$\gamma_1(t) + \gamma_2(t) \to \sigma_1(t) + \sigma_2(t)$

Boltzmannの重ね合わせの法則
⇒任意の$\gamma(t)$に対する応答　$\sigma(t)$が
緩和弾性率から計算できる





応力の足し合わせ

微小ひずみの応答の重ね合わせ

ステップひずみによる応力は

$$\Delta\sigma(t) = G(t-t')\Delta\gamma(t')$$

この総和により時刻 t における応力が定まるから

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-t')\frac{d\gamma(t')}{dt'}dt'$$

定常粘度: $\dfrac{d\gamma}{dt} = const.$

$$\eta_0 = \frac{\sigma(t)}{d\gamma/dt} = \int_{-\infty}^{t} G(t-t')dt' = \int_{0}^{\infty} G(t')dt'$$

$G(t) = G_0 \exp(-\dfrac{t}{\tau})$ の場合は

$$\eta_0 = G_0 t$$

周期的ひずみを加えた場合

周期的ひずみ

$$\gamma(t) = \gamma_0 \cos(\omega t)$$

弾性体 $\sigma(t) = G\gamma(t) = G\gamma_0 \cos(\omega t)$

粘性体 $\sigma(t) = \eta \dfrac{d\gamma(t)}{dt} = -\eta\gamma_0\omega \sin(\omega t)$

形式的に，粘弾性体は

$$\sigma(t) = \gamma_0 \left[G'(\omega)\cos(\omega t) - G''(\omega)\sin(\omega t)\right]$$

貯蔵弾性率，損失弾性率

$\gamma(t) = \gamma_0 \cos(\omega t)$ を次式に代入

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-t') \frac{d\gamma(t')}{dt'} dt'$$

$$G'(\omega) = \omega \int_0^{\infty} G(t)\sin(\omega t)dt$$

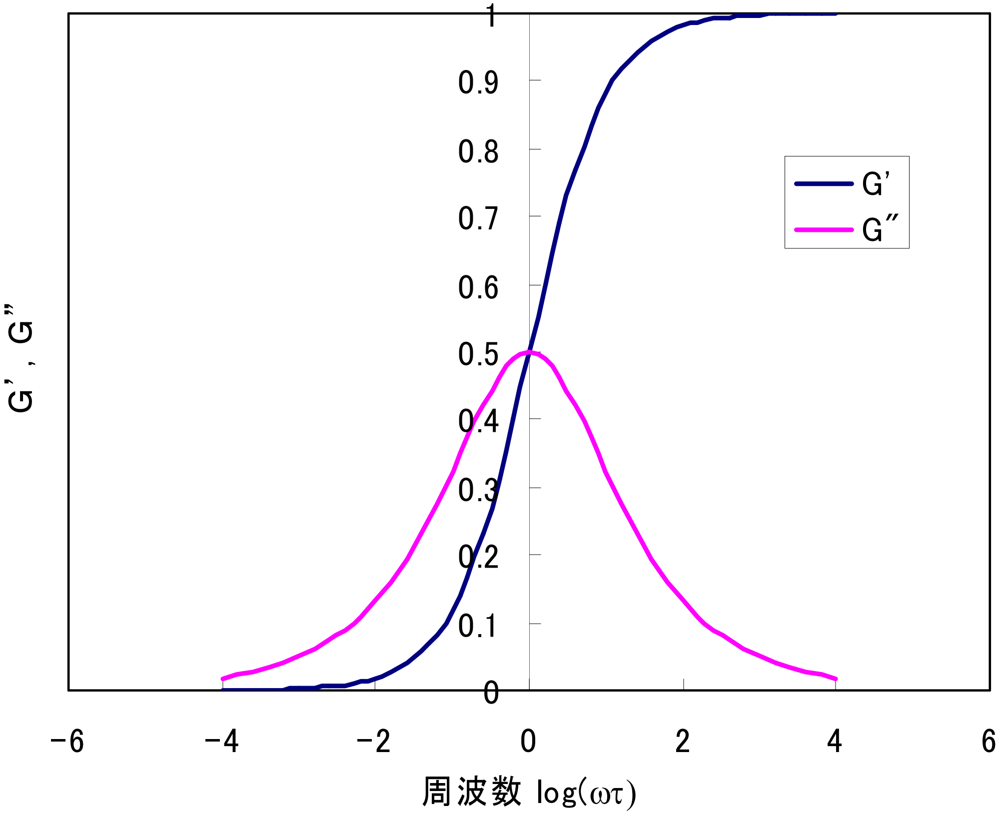
$$G''(\omega) = \omega \int_0^{\infty} G(t)\cos(wt)dt$$

$G(t) = G_0 \exp(-\dfrac{t}{\tau})$ の場合

$$G'(\omega) = \frac{G_0\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}$$

$$G''(\omega) = \frac{G_0\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$$

緩和弾性率と損失弾性率



$$G'(\omega) = \frac{G_0\omega^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}$$

$$G''(\omega) = \frac{G_0\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2}$$

材料科学B（力学的性質）　講義内容のまとめ
材料の力学的性質として，弾性，粘性，粘弾性をとりあげ，それぞれ微視的，巨視的な観点から解説する

	弾性	粘性	粘弾性
微視的	エネルギー弾性 （ポテンシャルエネルギー） エントロピー弾性 温度依存性 異方性 （結晶，高分子材料）	気体の粘性 液体の粘性 温度依存性	擬弾性
巨視的	真応力と真ひずみ 引張弾性率 せん断弾性率, 体積弾性率 ポアソン比 負のポアソン比 重ね合わせの原理	伸長粘度 せん断粘度 ハーゲンポアゼーユの式 体積流量	マックスウェルモデル フォークトモデル 緩和時間
応用展開 （紹介のみ）	異方性材料 テンソル解析	ナビエ・ストークスの方程式	線形粘弾性の一般式