

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 5 回 (逆井 2012 年 6 月 11 日)

演習問題 (テーマ: 行列式, 余因子展開)

[1] 次の順列の転倒数と符号を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[2] 次の行列の行列式の値を求めよ. ただし, $e_1, e_2, \dots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ における基本ベクトルとする.

$$(1) n \text{ 次正方行列 } \begin{pmatrix} e_n & e_{n-1} & \cdots & e_1 \end{pmatrix}$$

$$(2) n = 2m \text{ 次正方行列}$$

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_3 & e_5 & \cdots & e_{2m-3} & e_{2m-1} & e_{2m} & e_{2m-2} & \cdots & e_6 & e_4 & e_2 \end{pmatrix}$$

[3] 行基本変形や列基本変形の下での行列式の値の変化に注意して, 次の行列式の値を求めよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & 0 \\ h & i & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 + \sqrt{-1} & 2 & 2 - \sqrt{-1} & 5 + \sqrt{3} \\ 0 & 1 - \sqrt{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{-1} & 0 & 2 + \sqrt{3} \\ 0 & 5 - \sqrt{3} & 2 - \sqrt{3} & 4 \end{vmatrix} \quad (5) \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$[4] \text{ 正方行列 } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ について次に答えよ.}$$

(1) 行列式 $|A|$ を 3 行目に関して余因子展開した式を書け.

(2) $|A|$ を 2 列目に関して余因子展開した式を書け.

(3) $|A|$ を求めよ.

参考 (順列の転倒数と符号)

- 自然数 $1, 2, \dots, n$ を適当な順番で横一列に並べたもの

$$(p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n)$$

を長さ n の順列という.

- 長さ n の順列 $(p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n)$ に対して, $i < j$ かつ $p_i > p_j$ となる i と j の組の数をその順列の**転倒数**という. 転倒数が r のとき, 順列 $(p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n)$ の**符号** $\varepsilon(p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n)$ を $\varepsilon(p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n) = (-1)^r$ と定義する.
- 順列の中の隣り合う 2 つの数を交換すると, その 2 つの数の大小に対応して転倒数は 1 増えるかまたは 1 減る. これより上で述べた順列の符号の定義は, その順列を順列 $(1 \ 2 \ \cdots \ n)$ へと変換するのに用いられる互換の数の偶奇による定義 (講義で与えられたもの) と一致することがわかる.

レポート問題

以下の問題の解答を **A4 のレポート用紙**もしくは**コピー用紙 1 枚** (裏面利用可, 2 枚目以上は無効) にまとめ, **6 月 25 日 (月)** の演習の時間のはじめに提出して下さい.

[L2] あなたの学籍番号の末尾 4 桁の数字を位の大きい順に x, y, z, w とする (たとえば, 学籍番号が 12_12345 ならば, $x = 2, y = 3, z = 4, w = 5$ となる).

- (1) 下の正方行列に x, y, z, w の値を代入せよ.
- (2) (1) で得られた正方行列の階数と行列式の値を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2w - 14 & y + 1 & w - y - 13 & w - y - 12 \\ 2w - 1 & 3x + 2z - 18 & w - 3x - 2z + 19 & w - 3x - 2z - 1 \\ -2w + 24 & -2y - 2 & -w + 2y + 24 & -w + 2y + 22 \\ -1 & 9 - x - z & x + z - 10 & x + z \end{pmatrix}$$

以上.

お知らせ

- 次回は **6 月 18 日 (月)** で, **微分積分** の演習を行います.
- 演習課題は OCW (<http://www.ocw.titech.ac.jp/>) にアップロードします. 演習問題や小テスト問題の略解もありますので必要に応じてダウンロードして下さい.

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 5 回 (逆井 2012 年 6 月 11 日)

小テスト問題

次の問題の解答を記入して下さい. 問題に断りがない限り, 答えのみを記したものは解答とは認めません.

[1] 次の行列式の値を求めよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad (2) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & -3 & 4 \\ 3 & 9 & -2 & 3 \\ -4 & -2 & -1 & -9 \end{vmatrix}$$

[ヒント: (2) の答えは 3 桁の正の数. 計算ミスに注意.]

学籍番号 _____ 氏名 _____

[2] 写像 $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ が, どの変数についても偏微分可能な函数 f_1, f_2, f_3 を用いて

$$F(x_1, x_2, x_3) = (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3))$$

で与えられているとき, 行列 $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 3}$ を函数 F の**ヤコビ行列**といい, ヤコビ行列の行列式を**ヤコビアン**という. 空間極座標変換

$$P(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

について P のヤコビ行列とヤコビアンを求めよ.

以上.

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 5 回 演習課題解答

(逆井 2012 年 6 月 11 日出題)

小テスト解答

[1] (各 1 点)

(1) ある列の定数倍を別の列に加えても行列式の値が変わらないことに注意すると,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

(2) 列基本変換によって 1 を作りだすことを考えてみる. その際になるべく分数を出さないようにすると計算ミスを予防できる. 時間があれば, 他の手順でも求めてみて結果を確認するとよい.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & -3 & 4 \\ 3 & 9 & -2 & 3 \\ -4 & -2 & -1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 6 & -21 & -2 \\ 21 & 9 & -29 & -6 \\ -8 & -2 & 5 & -7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 13 & -21 & -2 \\ 9 & 21 & -29 & -6 \\ -2 & -8 & 5 & -7 \end{vmatrix} \\ = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & -2 \\ 9 & -15 & 31 & -6 \\ -2 & -50 & 75 & -7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -15 & 16 & -36 \\ -2 & -50 & 25 & -107 \end{vmatrix} \\ = -(-107 \cdot 16 + 36 \cdot 25) = 1712 - 900 = 812.$$

[2] (2 点)

函数 P のヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

であり, ヤコビアン (ヤコビ行列の行列式) は $r^2 \sin \theta$ である.

演習問題略解

[1] (1) 転倒数は 4 で符号は $(-1)^4 = 1$. (2) 転倒数は 9 で符号は $(-1)^9 = -1$.

(3) 転倒数は $\frac{n(n-1)}{2}$ で符号は $(-1)^{n(n-1)/2}$.

[2] 求める行列式は基本ベクトルの番号を並べた順列の符号にほかならない.

(1) 問題 [1] (3) の計算結果より行列式は $(-1)^{n(n-1)/2}$.

(2) 順列 $(1 \ 3 \ 5 \ \cdots \ 2m-3 \ 2m-1 \ 2m \ 2m-2 \ \cdots \ 6 \ 4 \ 2)$ の転倒数は $m(m-1)$ であり常に偶数である. よって求める行列式は 1.

[3] (1) $-10\sqrt{3}$ (2) -1 (3) $dgi j$

(4) $-(1 + \sqrt{-1})(1 - \sqrt{-1})(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = -2$ (5) 8

$$[4] (1) - \begin{vmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(2) 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(3) $|A| = 2$.