7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 4 回 (逆井　2012 年 5 月 28 日)

演習問題 (テーマ: 逆行列, 1 次結合)

[1] 次の行列の逆行列が存在するか判定し, 存在する場合はそれを求めよ.

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} & 1 \\ -\sqrt{-1} & 1 & \sqrt{-1} \\ 1 & -\sqrt{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

[2] 次のベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^4$ を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ の 1 次結合として表すことができるかどうか調べ, 表すことができる場合はそれを具体的に与えよ.

$$(1)\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$(2)\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

[3] A を複素 $m \times n$ 行列とし, A に行基本変形を繰り返し行って得られた行列を B とする. A, B の列ベクトルへの分割をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$$

とするとき, 複素数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ に対して, $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$ が成り立つことと, $c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{o}$ が成り立つことは同値であることを示せ.

注意　この問題より,「列ベクトルの間の 1 次関係式は行基本変形によって保たれる」ということが分かります. この性質は**必ず覚えておいて下さい**.

[4] $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ -5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ に対し, 正則行列 $P = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 14 \\ -5 & 6 & 7 \\ 10 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ を左から掛けて得られる行列を B とする. 行列 $B = PA$ の列ベクトルへの分解を

$$B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{b}_4 & \boldsymbol{b}_5 & \boldsymbol{b}_6 \end{pmatrix}$$

とするとき, 列ベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_6$ のそれぞれを, $\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4, \boldsymbol{b}_5$ の 1 次結合の形で表せ.

参考 (ベクトルの 1 次結合)

- $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ と実数 $c_1, c_2, \ldots, c_r$ に対して

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r$$

  で表されるベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ **の 1 次結合**という.

- $\mathbb{C}^n$ のベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ と複素数 $d_1, d_2, \ldots, d_r$ に対してもそれらの 1 次結合が同様に定義される.

以上.

お知らせ

- 次回は **6 月 4 日 (月)** で, **微分積分**の演習を行います.
- 演習課題は OCW (http://www.ocw.titech.ac.jp/) にアップロードします. 演習問題や小テスト問題の略解もありますので必要に応じてダウンロードして下さい.

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 4 回 （逆井　2012 年 5 月 28 日）

小テスト問題

次の問題の解答を記入して下さい. 問題に断りがない限り, 答えのみを記したものは解答とは認めません.

[1] $\mathbb{R}^4$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の

それぞれを,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

の 1 次結合で表せ.

学籍番号 ________________ 氏名 ________________________ _________

[2] 次の $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5$ に対し，$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{pmatrix}$ とおく．

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(1) A を階段行列に変形し，A の階数を求めよ．

(2) $\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_5$ のそれぞれを，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ の 1 次結合の形で表せ．

以上．

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 4 回 演習課題解答

(逆井　2012 年 5 月 28 日出題)

小テスト解答

[1] (2 点)

$\boldsymbol{e}_i = x_{1i}\boldsymbol{a}_1 + x_{2i}\boldsymbol{a}_2 + x_{3i}\boldsymbol{a}_3 + x_{4i}\boldsymbol{a}_4$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ とおき, $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix}$, $X = (x_{ij})$ と定めると,

$$AX = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_4 \end{pmatrix} = I_4$$

が成り立つ. よって $X = A^{-1}$ となり, これを具体的に計算すると,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 \end{pmatrix}$$

が得られる. これより

$$\boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3,$$
$$\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{a}_2 - 2\boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4, \qquad \boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{3}{4}\boldsymbol{a}_4$$

となることがわかる.

[2] ((1) 2 点, (2) 1 点)

(1) $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ を階段行列に変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. A の階数は 3.

(2) 階段行列の形より,

$$\boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2, \qquad \boldsymbol{a}_5 = 2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_4$$

となることがわかる.

注意 (1) で求めた階段行列を $\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{b}_4 & \boldsymbol{b}_5 \end{pmatrix}$ と列ベクトルに分割してその成分を見れば, 明らかに $\boldsymbol{b}_3 = -\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_5 = 2\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_4$ が成り立っている. 演習問題 **[3]** で見たように, 行基本変形を繰り返し行っても列ベクトルの間の 1 次関係式は保たれるので, 解答にあるような, $\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ に置き換えた関係式が成立する.

演習問題略解

[1] (1) A の階段行列を計算すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので, A の階数は 3 である. よって A は逆行列を持たない.

(2) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1}/2 & 1/2 \\ -\sqrt{-1}/2 & 0 & \sqrt{-1}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{-1}/2 & 0 \end{pmatrix}$.

[2] 実数 c_1, c_2, c_3 を用いて $\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 + c_3\boldsymbol{x}_3$ と書けたとすると,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}$$

となる. よって $X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = {}^t\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ とおくと, 問題は連立 1 次方程式 $X\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}$ の解 $\boldsymbol{c}$ の存在を調べることに帰着する.

(1) 拡大係数行列 $(X \mid \boldsymbol{a})$ の階段行列は $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ となるので, 方程式の解は $c_1 = 1, c_2 = -1, c_3 = 1$ のみ. よって $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_3$ と表すことができる.

(2) 拡大係数行列 $(X \mid \boldsymbol{a})$ の階段行列は $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ となるので方程式は解を持たない. よって, $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ の 1 次結合では書くことができない.

[3] B は A から行基本変形をして得られるので, ある正則行列 P を用いて, $B = PA$ となる. とくに,

$$B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix} = PA = \begin{pmatrix} P\boldsymbol{a}_1 & P\boldsymbol{a}_2 & \cdots & P\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

となるので, すべての i $(1 \leq i \leq n)$ について $\boldsymbol{b}_i = P\boldsymbol{a}_i$ が成立する. この等式を用いると, $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$ が成り立っているとき, 両辺に左から P を掛けると $c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{o}$ となり, 逆に $c_1\boldsymbol{b}_1 + c_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{o}$ が成り立っているとき, 両辺に左から P^{-1} を掛けると $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$ となることがわかる.

[4] A の列ベクトルへの分割を

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{pmatrix}$$

とすると, 明らかに

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_1 &= 2\boldsymbol{a}_2 - 5\boldsymbol{a}_4 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_5 \\ \boldsymbol{a}_3 &= -3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_5 \\ \boldsymbol{a}_6 &= -\boldsymbol{a}_2 + 2\boldsymbol{a}_4 + 2\boldsymbol{a}_5 \end{aligned}$$

が成り立つ. 演習問題 **[3]** で見た性質を使うと, 正則行列 P を掛けて得られる行列 $B = PA = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{b}_3 & \boldsymbol{b}_4 & \boldsymbol{b}_5 \end{pmatrix}$ について, 上の関係式における $\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{b}$ に置き換えた関係式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_1 &= 2\boldsymbol{b}_2 - 5\boldsymbol{b}_4 + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_5 \\ \boldsymbol{b}_3 &= -3\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_4 + \boldsymbol{b}_5 \\ \boldsymbol{b}_6 &= -\boldsymbol{b}_2 + 2\boldsymbol{b}_4 + 2\boldsymbol{b}_5 \end{aligned}$$

が成立する.

レポート問題解答 (5 月 14 日出題)

[L1] サイズが 3×4 の階段行列は次の 15 パターン存在する:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$