7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 3 回 (逆井　2012 年 5 月 14 日)

演習問題 (テーマ: 行基本変形, 階段行列, 連立 1 次方程式, 逆行列)

[1] 3 次の正方行列に対して次の行基本変形を順番に行ったとする:

1. 第 2 行を -2 倍する,
2. 第 1 行の 3 倍を 第 2 行に加える,
3. 第 2 行の -1 倍を 第 3 行に加える,
4. 第 1 行と第 3 行を入れ替える,

この変形を表す正則行列 P を具体的に表せ[1].

[2] 次の行列を行基本変形によって階段行列に変形し, その行列の階数を答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{-1} & 3 \\ 4\sqrt{-1} & 5 & 6+6\sqrt{-1} \\ 2 & 6-4\sqrt{-1} & -6+12\sqrt{-1} \end{pmatrix}$

[3] 次の拡大係数行列に対応する連立 1 次方程式を書き下せ. また, 方程式の解を求めよ (拡大係数行列がすでに階段行列になっているので, これ以上行列を変形する必要はない).

(1) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$　(2) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

[1]任意の 3 次の正方行列 X に対して PX は上の変形を施した行列になる.

[4] 次の連立 1 次方程式を拡大係数行列を用いて表し, 掃き出し法を用いて解を求めよ.

(1) $$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 & = & 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 + 2x_5 & = & 5 \end{array}\right.$$

(2) $$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 5x_5 & = & 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_5 & = & 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + x_4 + 7x_5 & = & 1 \end{array}\right.$$

[5] 次の行列の逆行列が存在するか判定し, 存在する場合はそれを求めよ.

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

レポート問題

以下の問題の解答を **A4 の**レポート用紙もしくはコピー用紙 **1 枚** (裏面利用可, 2 枚目以上は無効) にまとめ, **5 月 28 日 (月)** の演習の時間のはじめに提出して下さい.

[L1] 階段行列であるような 3×4 行列をすべて挙げ, それぞれの階数を答えよ [解答のみでよい]. ただし, 任意の数が入る成分については $*$ と書けばよい. たとえば $\begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ はサイズが 2×4 の階段行列である.

以上.

お知らせ

- 次回は **5 月 21 日 (月)** で, **微分積分**の演習を行います.
- 演習課題は OCW (http://www.ocw.titech.ac.jp/) にアップロードします. 演習問題や小テスト問題の略解もありますので必要に応じてダウンロードして下さい.

参考 (階段行列について)

- 次の 3 つの性質をすべて満たす行列 A を**階段行列**と呼ぶ.
  1. A を行ベクトルに分割したとき, 零ベクトルとなっている行は, すべての零ベクトルでない行よりも下にある. (零ベクトルとなっている行は A の下の方にまとまっている, ということ.)
  2. A の零ベクトルでない行それぞれについて, 成分を左から順番に見ていくと, 最初にでてくる 0 でない成分 (その行の**主成分**と呼ぶ) は 1 である. また, i 行目の主成分が j_i 列目にあったとすると, $j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$ が成り立つ.
  3. 主成分を含む列のその他の成分は 0. (すなわち A の第 j_i 列は基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ になっている.)

- 階段行列の例

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

  ほか, 単位行列, 零行列も階段行列である.

- 行列 A が与えられたとき, **行基本変形**を繰り返し行うことで階段行列 B を得ることができる. しかも階段行列 B は**途中の変形の方法に依存せず, 一通りに定まる**という著しい性質を持つ.

参考 (掃き出し法による連立 1 次方程式の解法)

- 与えられた連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ から拡大係数行列 $\widetilde{A} = (A \mid \boldsymbol{y})$ を作る[2]. A のサイズを $m \times n$ とすると, $\widetilde{A}$ のサイズは $m \times (n+1)$ である.

- $\widetilde{A}$ に対し, **行基本変形のみ**を繰り返し行って, 階段行列 B を得る.

- B において, 最も右の列が主成分を含む列になっているとき, 連立方程式は**解をもたない**. 実際, その主成分を含む行を方程式に書き直すと $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 1$ となっており決して成り立たない. たとえば,

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  であったとすると, 対応する連立 1 次方程式は解をもたない.

[2] 縦棒は最も右の列が方程式の右辺のベクトルを表していることを覚えておくためのものであって, 本質的なものではない.

- B において, 最も右の列が主成分を含む列になっていないとき, 方程式の解は次のようにしてパラメータ表示できる.

1. 1 から n のうち, 主成分を含まない列の番号それぞれについて, 対応する変数をパラメータとして設定する. たとえば,

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

であったとすると, 主成分を含む列は第 2, 4 列であるから, $\{1,2,3,4\} - \{2,4\} = \{1,3\}$ より, 変数 x_1, x_3 をパラメータとして設定する ($x_1 = c_1, x_3 = c_3$ とする).

2. B を連立 1 次方程式の形に戻してみると, その他の変数について, 1 で設定したパラメータを用いて表示することができる. それらを整理すれば方程式の解が得られる. 上の例では

$$\begin{cases} x_2 + 2c_3 & = & -1 \\ \quad x_4 & = & -2 \end{cases}$$

より, 方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -2c_3 - 1 \\ c_3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. 後々の応用上, 解は右辺のような表示をするように心がけるとよい.

参考 (逆行列の計算法)

- n 次の正方行列 A の逆行列を求めるには, 各基本ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ $(1 \leq j \leq n)$ について連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$$

を解き (A に逆行列が存在すれば, 解は**ただひとつ**に定まる), その解 $\boldsymbol{x}_j$ たちを並べた行列

$$X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$$

を考えればよい. 実際

$$AX = A\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 & \cdots & A\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} = I_n$$

が成り立つので $A^{-1} = X$ となることが従う.

- 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j$ たちは $(A \mid I_n)$ という $n \times 2n$ 行列の階段行列を考えることで**まとめて解くことができる**. 実際, 階段行列は $(I_n \mid A^{-1})$ となる.

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 3 回 （逆井　2012 年 5 月 14 日）

小テスト問題

次の問題の解答を記入して下さい. 問題に断りがない限り, 答えのみを記したものは解答とは認めません.

[1] 次の連立 1 次方程式を拡大係数行列を用いて表し, 掃き出し法を用いて解を求めよ.

(1) $$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 5x_4 &= 1 \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 1 \\ -7x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 &= 1 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 8x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 &= 3 \\ 5x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 12x_4 &= 4 \end{cases}$$

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　＿＿＿＿＿

[2] 次の連立 1 次方程式の解を掃き出し法を用いて求めよ.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & a \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

注意 a の値に関して場合分けを行って下さい.

以上.

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 3 回
演習課題解答

（逆井　2012 年 5 月 14 日出題）

小テスト解答

[1] (3 点)

(1) 拡大係数行列は $\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -3 & 8 & -5 & 1 \\ 5 & -2 & 5 & -3 & 1 \\ -7 & 3 & -7 & 4 & 1 \end{array}\right)$ であり, その階段行列は

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

となるので, この方程式は解を持たない.

(2) 拡大係数行列は $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 1 & 8 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 7 & 3 \\ 5 & -5 & 3 & 12 & 4 \end{array}\right)$ であり, その階段行列は

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となるので, 求める方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である (c_2, c_4 はパラメータ).

[2] (2 点)

拡大係数行列について, 階段行列の計算を進めていくと

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる. よって $a=2$ のときは

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

が階段行列となり, 方程式は c_3, c_4 をパラメータとして

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を解に持つ. $a \neq 2$ のときは

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

が階段行列となり, 方程式は c_3 をパラメータとして

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解に持つ.

演習問題略解

[1]　1, 2, 3, 4 の行基本変形を表す行列はそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるので, 求める行列 P はその積

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる (積の順番に注意).

(別解) **任意の** 3 次の正方行列 X に対して, 問題文にある変形を行った行列を Y とすると $Y = PX$ が成り立つ. とくに $X = I_3$ とすると $Y = PI_3 = P$ となる. いま

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから, 求める行列 P は $P = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられる.

[2] (1) A を階段行列に変形すると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる. 階数は 3.

(2) B を階段行列に変形すると $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ となる. 階数は 3.

(3) C を階段行列に変形すると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1-4\sqrt{-1} \\ 0 & 1 & -2+2\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる. 階数は 2.

[3] (1) 拡大係数行列に対応する連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x_1 - x_3 & = & 1 \\ x_2 & = & 2 \\ x_4 & = & 3 \end{cases}$$

であり, 方程式の解は c_3 をパラメータとして, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる.

(2) 拡大係数行列に対応する連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \\ 0 & = & 1 \end{cases}$$

である. 第 3 式よりわかるように, この方程式は解を持たない.

[4] (1) 拡大係数行列は $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right)$ であり, その階段行列は

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

となるので, 求める方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である (c_2, c_4 はパラメータ).

(2) 拡大係数行列は $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 4 & 1 & 7 & 1 \end{array}\right)$ であり, その階段行列は

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

となるので, この方程式は解を持たない.

[5] (1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$