7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 2 回 (逆井　2012 年 4 月 23 日)

演習問題 (テーマ: 行列の演算, ブロック分け)

[1] 行列 A, B を

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1}\\ 0 & -\sqrt{-1}\\ 2+\sqrt{-1} & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}\\ 0\\ 1+\sqrt{-1}\end{pmatrix}$$

で定める. 4 つの行列 $A, B, {}^tA, {}^tB$ の間で積が定義される組を調べ, その積をそれぞれ計算せよ.

[2] 次の行列の積をブロック分けに従って計算し, その後で直接計算した結果と比較せよ.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 1 & -4\\ \hline 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 3 & -2\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c}3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ \hline 5 & 3 & 0\\ -2 & -3 & 0\end{array}\right)$$

[3] 次の等式を満たす行列 A を求めよ.

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 7\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

[4] A を m 次の正則行列, B を n 次の正則行列, C を $m\times n$ 行列とするとき, 次の行列 X, Y, Z, W は正則であることを確かめ, その逆行列を求めよ.

(1) $X=\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}$　(2) $Y=\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}$　(3) $Z=\begin{pmatrix}A & O\\ {}^tC & B\end{pmatrix}$　(4) $W=\begin{pmatrix}C & A\\ B & O\end{pmatrix}$

以上.

お知らせ

- 次回は **5 月 7 日 (月)** で, **微分積分**の演習を行います.
- 演習課題は OCW (http://www.ocw.titech.ac.jp/) にアップロードします. 演習問題や小テスト問題の略解もありますので必要に応じてダウンロードして下さい.

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 2 回 （逆井　2012 年 4 月 23 日）

小テスト問題

次の問題の解答を記入して下さい. 問題に断りがない限り, 答えのみを記したものは解答とは認めません.

[1] 以下の問題に答えよ. [答えのみでよい]

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3\sqrt{-1} & 5 \\ 2\sqrt{-1} & 4 & 6\sqrt{-1} \end{pmatrix}$ の転置行列を書け.

(2) A を $m \times m$ 行列, B を $m \times n$ 行列, C を $n \times m$ 行列, D を $n \times n$ 行列とするとき, 行列 $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ の転置行列 ${}^tX$ を書け.

(3) $m \times n$ 行列 $X = (x_{ij})_{m \times n}$ と $n \times m$ 行列 $Y = (y_{kl})_{n \times m}$ に対し, 積 XY のサイズを答えよ.

(4) (3) の行列 X, Y に対し, 積 XY の (p, q) 成分を x_{ij}, y_{kl} たちを用いて具体的に表せ.

(5) 行列の積 $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{-1} & 3 \end{pmatrix}$ を計算せよ.

学籍番号 ＿＿＿＿＿＿＿＿ 氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ ＿＿＿＿＿

[2] $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ とするとき，$A^2, A^3, A^4, \ldots, A^n, \ldots$ を計算せよ.

以上.

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 2 回 演習課題解答

(逆井　2012 年 4 月 23 日出題)

小テスト解答

[1] (2 つ正解で 1 点, 全て正解で 2 点)

(1) ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{-1} \\ 3\sqrt{-1} & 4 \\ 5 & 6\sqrt{-1} \end{pmatrix}$　　(2) ${}^tX = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix}$

(3) $m \times m$　　(4) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} x_{pr}y_{rq}$　　(5) $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{-1} & -3 \\ 2 & -2\sqrt{-1} & 6 \\ \sqrt{-1} & 1 & 3\sqrt{-1} \end{pmatrix}$

[2] (2 点)

$A^2 = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1/3 & (1-\sqrt{3})/3 & (1+\sqrt{3})/3 \\ (1+\sqrt{3})/3 & 1/3 & (1-\sqrt{3})/3 \\ (1-\sqrt{3})/3 & (1+\sqrt{3})/3 & 1/3 \end{pmatrix}$,

$A^4 = I_3$ となるので, m を自然数として,

$$A^{4m-3} = A, \quad A^{4m-2} = A^2, \quad A^{4m-1} = A^3, \quad A^{4m} = I_3.$$

演習問題略解

[1] 積が定義されるのは次の 6 通り:

$$A{}^tA = \begin{pmatrix} -1+2\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} & 3\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} & -1 & -\sqrt{-1} \\ 3\sqrt{-1} & -\sqrt{-1} & 4+4\sqrt{-1} \end{pmatrix},$$

$$B{}^tB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1+\sqrt{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1+\sqrt{-1} & 0 & 2\sqrt{-1} \end{pmatrix},$$

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 2+4\sqrt{-1} & 1+2\sqrt{-1} \\ 1+2\sqrt{-1} & 2\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \quad {}^tAB = \begin{pmatrix} 3\sqrt{-1} \\ 2\sqrt{-1} \end{pmatrix},$$

$${}^tBA = \begin{pmatrix} 3\sqrt{-1} & 2\sqrt{-1} \end{pmatrix}, \quad {}^tBB = \begin{pmatrix} -1+2\sqrt{-1} \end{pmatrix}.$$

[2] $\begin{pmatrix} 15 & 8 & 2 \\ 7 & 23 & -1 \\ -12 & -9 & 0 \\ 19 & 15 & 0 \end{pmatrix}$

[3] 等式 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ の両辺に左から

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

を掛け, 右から

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を掛けると

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 14 & -7 & 8 \\ -10 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

[4] 与えられた行列たちはそれぞれ次のような逆行列をもつので正則である.

(1) $X^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$ (2) $Y^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$

(3) $Z^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1\,t}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$

(4) $W^{-1} = \begin{pmatrix} O & I_n \\ I_m & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}$