7 類 V クラス 線形代数学演習第一, 微分積分学演習第一 第 8 回

（逆井　2012 年 7 月 23 日）

お知らせ

- 本日の演習は線形代数学と微分積分学の演習を並行して行います.
- 本日は小テストを行わず, 90 分間すべて周りの人と相談しながら問題を解く時間とします. 講義の試験勉強をしてもかまいません.
- 後ほど線形代数学演習の授業アンケートを行いますのでご協力をお願いします.
- 演習の時間の終わりに, 下の部分に記入し, 切り取ったものを提出して下さい. それをもって本日の出席とします.
- 演習課題は OCW (http://www.ocw.titech.ac.jp/) にアップロードします. 演習問題の略解もありますので必要に応じてダウンロードして下さい.
- 返却できなかった (演習に全参加した人にはすべて返却しています) レポートや小テストの結果は数学事務室 (本館 3 階, 332 号室) に預けますので, そちらで受け取って下さい.
- 本科目の評価は毎回の出席, 小テスト, レポート課題の結果を総合的に判断して行います. 微分積分学演習と線形代数学演習の成績は別々につけます. 追加の課題などは出しませんので, 本日の演習の時間の終了をもって, 成績は確定します.

学籍番号 ________________　　氏名 ________________________　　__________

(1) 次のアンケートにお答え下さい (あてはまる番号に○をつけて下さい).

a) 演習問題について (微分積分, 線形代数共通):

1. 手がつかない,　2. 難しい,　3. 普通,　4. 易しい,　5. 易しすぎる.

b) OCW に置いてある解答について:

1. 主に印刷して見ている,　2. 主にパソコンやスマートフォン上で見ている,
3. 見たことはある,　4. 見たことがない, もしくは気づかなかった.

(2) 演習に関してご意見やご感想, もしくはご提案がありましたらお書き下さい.

---

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 8 回 (逆井　2012 年 7 月 23 日)

演習問題 (テーマ: 基底と次元, 線形写像)

[1] ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ において, 次のベクトルたちが生成する部分空間 W の次元と 1 組の基底を求めよ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

[ヒント: 上の 5 つのベクトルから 1 次独立なベクトルの組で最大個数のものを選ぶ. 列ベクトルの間の 1 次関係式を見つける方法を思い出すとよい.]

[2] $\mathbb{R}^4$ の 2 つの部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \right\},$$
$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

で定めるとき, $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ それぞれに関して, 次元と 1 組の基底を求めよ.

[3] 次の $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像の表現行列を求めよ.

(1) $\mathbb{R}^3$ の点 A を, A から平面 $S : 2x - y + z = 0$ へ降ろした垂線の足に移す写像.

(2) $\mathbb{R}^3$ の点 B を, B から直線 $\ell = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$ へ降ろした垂線の足に移す写像.

[4] 写像 $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \qquad \text{ただし} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

で定義する[1].

(1) $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ を計算せよ.

(2) f が線形写像であることを確かめ, その表現行列を求めよ.

[5] 定数 $a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して, 線形写像 $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ ax+by+cz \end{pmatrix}$$

で定義し, その表現行列を A とする.

(1) A を求めよ.

(2) ベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し, p_n, q_n, r_n (ただし $n \geq 1$) を $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ で定めたとき, r_{n+3} を r_{n+2}, r_{n+1}, r_n を用いて表せ.

参考 (斉次連立 1 次方程式の解空間の基底)

- n 元斉次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解は, これまでの講義や演習で扱った方法を用いると, A の階数を k とするとき, $(n-k)$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-k}$ と $(n-k)$ 個の実数 $c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots c_{n-k}\boldsymbol{v}_{n-k}$$

と表されていたが, このとき $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-k}\}$ は解空間の基底となっている (1 次独立になる理由を考えてみよ). とくに方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解空間の次元は $n-k$ となる.

以上.

[1] ベクトルに写像を作用させる際に, 丸括弧を 2 個続けて書くことになるが, 面倒ならば 1 個でよい.

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 8 回
演習課題解答

(逆井　2012 年 7 月 23 日出題)

演習問題略解

[1] $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 & \boldsymbol{a}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと, A の階段行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる. 階段行列の形より, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ は 1 次独立であり,

$$\boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1, \qquad \boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + 3\boldsymbol{a}_4$$

となることがわかる. よって, W は $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4\}$ を基底とする 3 次元のベクトル空間となる.

[2] W_1, W_2 はそれぞれ方程式を解けばよい. W_1 は $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を基底にもつ 2 次元の部分空間であり, W_2 は $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を基底にもつ 2 次元の部分空間である.

$W_1 \cap W_2$ は W_1 と W_2 の定義方程式を連立して解けばよく, $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ を基底にもつ 1 次元の部分空間となる.

$W_1 + W_2$ は W_1, W_2 の基底を並べたベクトルで生成される部分空間の基底を求めればよい. 次元公式より $W_1 + W_2$ の次元は $2 + 2 - 1 = 3$ であり, W_1, W_2 の基底を並べた $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ が 1 次独立であることは容易に確かめられるので, これが $W_1 + W_2$ の基底を与える.

[3] (1) 平面 $S: 2x - y + z = 0$ は原点を通りベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を法線とする平面である. $\mathbb{R}^3$ の点 A の座標を $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とすると, 垂線の足の座標は $\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$ が平面 S 上にあるときを計算することにより

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2a+2b-2c \\ 2a+5b+c \\ -2a+b+5c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/6 & 2/6 & -2/6 \\ 2/6 & 5/6 & 1/6 \\ -2/6 & 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

となることがわかる. よって求める表現行列は $\begin{pmatrix} 2/6 & 2/6 & -2/6 \\ 2/6 & 5/6 & 1/6 \\ -2/6 & 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$.

(2) $\mathbb{R}^3$ の点 B の座標を $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とすると, 垂線の足は, B を通り直線 ℓ の方向ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を法線とする平面 S' と ℓ の交点として与えられる. いま S' の方程式は $x - y + z = a - b + c$ で与えられるので垂線の足の座標は

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} a-b+c \\ -a+b-c \\ a-b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

となることがわかる. よって求める表現行列は $\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

[4] (2) $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ より求める表現行列 A は $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

[5] (1) $f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\b\end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\\c\end{pmatrix}$ より

求める表現行列 A は $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&b&c\end{pmatrix}$.

(2) $k\geq 1$ に対し, 一般に

$$\begin{pmatrix}p_{k+1}\\q_{k+1}\\r_{k+1}\end{pmatrix}=A^{k+1}\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}=AA^k\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}p_k\\q_k\\r_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_k\\r_k\\ap_k+bq_k+cr_k\end{pmatrix}$$

となるので

$$\begin{aligned}r_{n+3}&=ap_{n+2}+bq_{n+2}+cr_{n+2}=aq_{n+1}+br_{n+1}+cr_{n+2}\\&=ar_n+br_{n+1}+cr_{n+2}\end{aligned}$$

が成り立つ.

注意 この問題で見たように, 行列の n 乗の計算を用いることで, 線形の漸化式 (定数 $c_{n+r-1},c_{n+r-2},\ldots,c_n$ を用いて

$$a_{n+r}=c_{n+r-1}a_{n+r-1}+c_{n+r-2}a_{n+r-2}+\cdots+c_{n+1}a_{n+1}+c_na_n$$

のように書けるもの) の一般解を求めることができる.