

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 7 回 (逆井 2012 年 7 月 9 日)

演習問題 (テーマ: 部分空間, 1 次独立, 1 次従属)

[1] 次の W がベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分空間となるか調べよ.

$$(1) W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 3x - z = y + 2z = x - y \right\}$$

$$(2) W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (x - y)^2 = z^2 \right\} \quad (3) W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid 2x - 3y + z \geq -1 \right\}$$

[2] $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ について次の問いに答えよ.

(1) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ の 1 次結合 (線形結合) の定義を述べよ.

(2) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ が 1 次独立であること, 1 次従属であることの定義をそれぞれ述べよ.

(3) 次の文の誤りを指摘せよ:

「 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ が 1 次従属ならば, どのような 1 次関係式 $c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_m\mathbf{u}_m = \mathbf{o}$ に対しても $c_1, c_2, \dots, c_m$ の中に 0 でないものが存在する。」

[3] 次のベクトルの組が 1 次独立であるか判定せよ. 1 次独立でなければ, 非自明な 1 次関係式を 1 つ与えよ.

$$(1) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- [4] $\mathbb{R}^n$ のベクトル $u_1, u_2, \dots, u_m$ が 1 次独立で, $u, u_1, u_2, \dots, u_m$ が 1 次従属ならば u は $u_1, u_2, \dots, u_m$ の 1 次結合で書けることを示せ.

参考 (斉次連立 1 次方程式の解空間)

- n 個の列からなる係数行列 A を用いて表された n 元斉次連立 1 次方程式 $Ax = o$ の解のベクトル全体の集合は, その方程式の**解空間**と呼ばれる $\mathbb{R}^n$ の部分空間となる. 実際, 次のように部分空間の性質を満たしていることが容易に確かめられる:

(1) 零ベクトル $o \in \mathbb{R}^n$ はもちろんその方程式の解である ($Ao = o$).

(2) x, y が共に方程式の解ならば

$$A(x + y) = Ax + Ay = o + o = o$$

より $x + y$ もまた解になる.

(3) 実数 λ と方程式の解 x に対して

$$A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda o = o$$

より λx もまた解になる.

- 上のことは複素ベクトル空間で考えても同様に成り立つ.

以上.

お知らせ

- 次回は **7 月 16 日 (月)** で, **微分積分** の演習を行います. **休日に授業が行われることに注意して下さい.**
- 再来週 7 月 23 日 (月) は線形代数と微分積分の演習を並行して行います.
- 演習課題は OCW (<http://www.ocw.titech.ac.jp/>) にアップロードします. 演習問題や小テスト問題の略解もありますので必要に応じてダウンロードして下さい.

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 7 回 (逆井 2012 年 7 月 9 日)

小テスト問題

次の問題の解答を記入して下さい. 問題に断りがない限り, 答えのみを記したものは解答とは認めません.

[1] 次の $\mathbb{R}^4$ のベクトルが 1 次独立かどうか判定せよ.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

学籍番号 _____ 氏名 _____

[2] a_1, a_2, a_3 を定数とするとき, 4つのベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} t \\ a_1 \\ a_1 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ t \\ a_2 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 \\ t \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_3 \\ a_3 \\ t \end{pmatrix}$$

が1次従属となるような t の値をすべて求めよ.

以上.

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 7 回 演習課題解答

(逆井 2012 年 7 月 9 日出題)

小テスト解答

[1] (2 点)

$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{o}$ をみたす $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ があったとする. 具体的に成分表示すると,

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

という斉次連立 1 次方程式が得られるが, この方程式の係数行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

の階数は 3 であるから, 方程式の解は $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ のみである. よって, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は一次独立である.

[2] (2 点)

$V = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{pmatrix}$ とすると, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ が 1 次従属となるのは連立 1 次方程式 $V\mathbf{x} = \mathbf{o}$ が非自明な解を持つときである. このようになるのは V が正則行列でないときであり, そのとき V の行列式は 0 となる. 以下, $|V|$ を計算する.

行列 V に対して第 2 行の (-1) 倍を第 1 行に加える, 第 3 行の (-1) 倍を第 2 行に加える, 第 4 行の (-1) 倍を第 3 行に加えるという操作を**順番**に行うと

$$|V| = \begin{vmatrix} t & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & t & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & t & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t - a_1 & a_1 - t & 0 & 0 \\ 0 & t - a_2 & a_2 - t & 0 \\ 0 & 0 & t - a_3 & a_3 - t \\ a_1 & a_2 & a_3 & t \end{vmatrix}$$

となる. ここで第 2 列を第 1 列に加える, 第 3 列を第 1 列に加える, 第 4 列を第 1 列

に加えるという操作を**順番**に行うと

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} t-a_1 & a_1-t & 0 & 0 \\ 0 & t-a_2 & a_2-t & 0 \\ 0 & 0 & t-a_3 & a_3-t \\ a_1 & a_2 & a_3 & t \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} & 0 & a_1-t & 0 & 0 \\ & 0 & t-a_2 & a_2-t & 0 \\ & 0 & 0 & t-a_3 & a_3-t \\ a_1+a_2+a_3+t & a_2 & a_3 & t & \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{1+4}(a_1+a_2+a_3+t) \begin{vmatrix} a_1-t & 0 & 0 \\ t-a_2 & a_2-t & 0 \\ 0 & t-a_3 & a_3-t \end{vmatrix} \\
 &= -(a_1+a_2+a_3+t)(a_1-t)(a_2-t)(a_3-t)
 \end{aligned}$$

となる. よって $|V| = 0$ となるのは

$$-(a_1+a_2+a_3+t)(a_1-t)(a_2-t)(a_3-t) = 0$$

のときであり, 求める t の値は

$$t = a_1, a_2, a_3, -a_1 - a_2 - a_3$$

となる.

演習問題略解

[1] (1) 定義を書き直すと, W は斉次連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 3x - y - 3z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

の解空間となることがわかる. よって W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間となる.

(2) $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は共に W の元であるが, その和 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は

W の元でないので W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間とならない.

(3) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は W の元であるが, その (-1) 倍である $-\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ は W の元で

ないので W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間とならない.

[2] (3) 主張は自明な 1 次関係式 $0\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + \cdots + 0\mathbf{u}_m = \mathbf{o}$ について成立しない.

注意 上のことは非常に瑣末なことのように思えるかもしれませんが, この周辺の問題を学生に解いてもらったときに毎年ほぼ必ず見受けられるミスとなっています.

[3] (1) $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}$ とおいて連立 1 次方程式 $A\mathbf{c} = \mathbf{o}$ を考えると, A の階数が 3 となることより, 解は $\mathbf{c} = \mathbf{o}$ のみであることがわかる. このことは $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ が 1 次独立であることを意味する.

(2) (1) と同様の方針で解けばよいが, 今回の場合は $2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4 = \mathbf{o}$ などといった非自明な 1 次関係式が (解 $\mathbf{c}$ として) 現れる. とくに $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ は 1 次独立でない.

[4] $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ が 1 次従属であるから, 非自明な 1 次関係式

$$c\mathbf{u} + c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_m\mathbf{u}_m = \mathbf{o}$$

が存在する ($c, c_1, c_2, \dots, c_m$ の少なくとも 1 つは 0 でない). いま, $c = 0$ と仮定すると,

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_m\mathbf{u}_m = \mathbf{o}$$

かつ $c_1, c_2, \dots, c_m$ の少なくとも 1 つは 0 でないということになり, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ が 1 次独立であることに矛盾する. よって $c \neq 0$ であり, このとき

$$\mathbf{u} = -\frac{c_1}{c}\mathbf{u}_1 - \frac{c_2}{c}\mathbf{u}_2 - \cdots - \frac{c_m}{c}\mathbf{u}_m$$

と $\mathbf{u}$ を $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m$ の 1 次結合で書くことができる.