7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 6 回 (逆井 2012 年 6 月 25 日)

演習問題 (テーマ: 余因子, 行列式の応用)

[1] 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4\sqrt{-1} & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5\sqrt{-1} & -1 \end{pmatrix}$ について次に答えよ.

(1) A の余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよ.

(2) A の行列式の値を求めよ. また, 存在するならば A の逆行列を求めよ.

[2] (1) 行列 $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & a_4 \\ -1 & x & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & -1 & x & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & x & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_0 \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

(2) $n \geq 3$ とするとき, n 次正方行列 $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式の値を求めよ.

[3] 正方行列 X, Y に対し,

$$\begin{vmatrix} X & Z \\ O & Y \end{vmatrix} = |X| \cdot |Y| \quad (O \text{ は零行列, } Z \text{ は何でもよい})$$

が成り立つことを利用して次に答えよ.

(1) A, B, C を n 次正則行列とするととき, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & O \end{vmatrix}$ を求めよ.

(2) A, B を n 次正則行列とするととき, $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|$ が成り立つことを示せ.

[4] t を実数とする. 行列

$$A_t = \begin{pmatrix} t-2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & t-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & t+1 \end{pmatrix}$$

について, 以下の問題に答えよ.

- (1) 行列 A_t の行列式を計算せよ.
- (2) 行列 A_t の階数を求めよ (t に関して場合分けを行うこと).

[5] xy 平面上の 3 点 $P(a_1, b_1), Q(a_2, b_2), R(a_3, b_3)$ を頂点とする三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ の絶対値}$$

に等しいことを示せ (簡単のため, 3 点は一直線上にないとしてよい)¹.

以上.

お知らせ

- 次回は **7月2日(月)** で, **微分積分** の演習を行います.
- 演習課題は OCW (<http://www.ocw.titech.ac.jp/>) にアップロードします. 演習問題や小テスト問題の略解もありますので必要に応じてダウンロードして下さい.

¹教科書「教養の線形代数」77 ページの発展問題 3.20 より.

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 6 回 (逆井 2012 年 6 月 25 日)

小テスト問題

次の問題の解答を記入して下さい。問題に断りがない限り、答えのみを記したものは解答とは認めません。

[1] 正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix}$ が正則となるための x に関する条件を求めよ。

学籍番号 _____

氏名 _____

[2] 正方行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ.

(1) λ に関する方程式 $|\lambda I_3 - A| = 0$ の解を求めよ. [答えのみでよい.]

(2) (1) で求めた解を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (ただし $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$) とするとき, 各 $i = 1, 2, 3$ について, $A\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i$ を満たす $\mathbf{o}$ でないベクトル $\mathbf{p}_i$ を 1 つずつ求めよ. [答えのみでよい.]

(3) (2) で求めたベクトルたちを並べた行列 $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ が正則行列であることを示せ.

(4) $P^{-1}AP$ を計算せよ.

以上.

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 6 回 演習課題解答

(逆井 2012 年 6 月 25 日出題)

小テスト解答

[1] (2 点)

$|A| = (1-x)^3(1+3x)$ であるから, $x \neq 1, -\frac{1}{3}$ のとき $|A| \neq 0$ となり, A は正則行列となる.

[2] (3 点)

(1) $|\lambda I_3 - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ となるので, 求める解は $\lambda = 1, 2, 3$.

(2) 条件より $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ となる. 等式 $A\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i$ を変形すると,

$$(*_i): (\lambda_i I_3 - A)\mathbf{p}_i = \mathbf{o}$$

となるので, 求める $\mathbf{p}_i$ は 1 次方程式 $(*_i)$ の非自明な解として与えられる. これらを解くと,

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

となる (それぞれについて, 上のベクトルをスカラー倍したのもでも可).

(3) $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ となるので, とくに P は正則である.

$$(4) P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

演習問題略解

$$[1] (1) \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2+5\sqrt{-1} & -\sqrt{-1} & 2+4\sqrt{-1} \\ 1 & -2 & -1 \\ -5\sqrt{-1} & 10\sqrt{-1} & -4-4\sqrt{-1} \end{pmatrix}.$$

(2) $|A| = 4 + 9i$, となるので A は正則行列である. 逆行列は

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|} = \frac{1}{4 + 9i} \begin{pmatrix} 2 + 5\sqrt{-1} & -\sqrt{-1} & 2 + 4\sqrt{-1} \\ 1 & -2 & -1 \\ -5\sqrt{-1} & 10\sqrt{-1} & -4 - 4\sqrt{-1} \end{pmatrix}.$$

[2] (1) $a_4 + a_3x + a_2x^2 + a_1x^3 + a_0x^4$

(2) 第 1 行に関して余因子展開すると 2 つの項が出てくるが, どちらも対角成分がすべて 1 であるような三角行列となっている. これより $|A_n| = 1 + (-1)^{n+1}$ となることがわかる.

[3] (1) $i = 1, 2, \dots, n$ について第 i 列と第 $(n+i)$ 列を入れ替えると

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & O \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} B & A \\ O & C \end{vmatrix} = (-1)^n |B| \cdot |C|$$

となることがわかる.

(2) $i = 1, 2, \dots, n$ について第 i 行の c 倍を第 $(n+i)$ 行に加えても行列式は変わらないことに注意すると (列についても同様),

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ A+B & A+B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-B & B \\ O & A+B \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|.$$

[4] (1) $|A_t| = (t-2)^2(t-1)(t+1) = t^4 - 4t^3 + 3t^2 + 4t - 4$.

(2) (1) より, $t \neq 2, 1, -1$ であれば, $|A_t| \neq 0$ となり, このとき A_t は正則であって, とくに A_t の階数は 4. 残った $t = 2, 1, -1$ のときを個別に計算すると, A_1 と A_{-1} の階数は 3 で, A_2 の階数が 2 となることがわかる.

[5] 教科書にある解答 (170 ページ) を参照.

別解

3 点を P が原点 O に移るように平行移動してできる三角形の面積を考えればよい. この移動によって Q が移る点を $A(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$, R が移る点を $B(a_3 - a_1, b_3 - b_1)$ とすると, 三角形 OAB の面積は OA, OB を 2 辺とする平行四辺形の面積の半分ゆえ

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ b_2 - b_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} \text{ の絶対値}$$

と等しい. 一方で

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & 0 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ b_2 - b_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix}$$

であるから, 結論が導かれる.

レポート問題解答 (6月11日出題)

[L2] (1) 各自の学籍番号を参照.

(2) 与えられた行列の行列式は

$$(w - 2)(100x + 10y + z + 1)$$

となっている. 階数は $w \neq 2$ ならば 4 であり, $w = 2$ ならば直接計算することにより 3 であることがわかる.