7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 1 回 （逆井　2012 年 4 月 9 日）

演習問題 (テーマ: 写像の単射性と全射性, 複素数)

[1] 次の写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単射かどうか, また, 全射かどうか調べよ.

$$(1) \quad f(x) = 3x + 1 \qquad (2) \quad f(x) = x^3 - 3x \qquad (3) \quad f(x) = e^x$$

[2] 次の複素数を $a + b\sqrt{-1}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形[2]で表せ.

(1) $(2 - \sqrt{-1})^3$ (2) $\dfrac{1 + 2\sqrt{-1}}{3 - 4\sqrt{-1}}$ (3) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{-1}}\right)^6$

(4) $z = 2 - \sqrt{-1}$ とするときの $\left| z - \dfrac{1}{z} \right|$

[3] 次の複素数を極表示せよ. また, それぞれの絶対値と偏角を答えよ.

$$(1) \quad (\sqrt{-1})^3 \qquad (2) \quad -4 + 4\sqrt{-1} \qquad (3) \quad \frac{4}{\sqrt{3} - \sqrt{-1}}$$

[4] 2 つの複素数 z_1, z_2 が

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\sin\theta_2)$$

と極表示されているとき, 積 $z_1 z_2$ を極表示せよ. また, 得られた結果を用いて等式

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \qquad \sin(3\theta) = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta$$

が成り立つことを示せ.

[5] 複素数 z に関する次の方程式の解をすべて求め, 複素平面に図示せよ.

$$(1) \quad z^2 = \sqrt{-1} \qquad (2) \quad z^2 = -\sqrt{3} + 3\sqrt{-1}$$

以上.

お知らせ

- 次回の演習は **4 月 16 日 (月)** で, **微分積分**の演習を行います.

---

[2] 虚数単位として i を使ってもよいが, 線形代数ではベクトルや行列の成分などの添字にしばしば i を用いるため, 混乱が起きないように注意する必要がある.

参考

写像について

- 集合 A から B への**写像** $f : A \to B$ とは, A の各元 a に対して, B のある元 $f(a)$ を対応させるもののことである.
- 集合 A, B と写像 $f : A \to B$ が与えられているとする.
  1. 任意の相異なる A の元 a_1, a_2 $(a_1 \neq a_2)$ に対して $f(a_1) \neq f(a_2)$ が成り立つ[3]とき, f は**一対一写像**もしくは**単射**であるという.
  2. 任意の B の元 b に対し, $f(a) = b$ となる A の元 a が存在するとき, f は**上への写像**もしくは**全射**であるという.
  3. f が全射かつ単射のとき, f は**全単射**であるという.
- 2 つの写像 $f : A \to B, g : B \to C$ に対し, **f と g の合成写像** $g \circ f : A \to C$ とは
$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$
によって定義される写像のことである.

よく用いられる集合の記号

- 線形代数では実数全体の集合 $\mathbb{R}$ や複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ がしばしば用いられる.
- ほか, 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$, 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$, 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ などがある.

複素平面と複素数の極表示

- 複素数 z が実数 x, y を用いて $z = x + y\sqrt{-1}$ と表されているとき, z に対して実座標平面の点 (x, y) を対応させることで複素数全体と実座標平面を自然に同一視することができる. このように同一視を行った座標平面を**複素平面**という. 複素平面において x-軸を**実軸**, y-軸を**虚軸**という.
- 複素平面上の点 $z = x + y\sqrt{-1}$ に対して, 原点と z の間の平面上での長さ $\sqrt{x^2 + y^2}$ を z の**絶対値**といい $|z|$ で表す. また, 原点から z に向かう半直線と実軸の非負の部分のなす角[4] θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で選んだときの値を z の**偏角**といい, $\arg z$ で表す.
- 絶対値と偏角を用いると, 複素数 z は $z = |z|(\cos(\arg z) + \sqrt{-1}\sin(\arg z))$ と表すことができる. このような表示を z の**極表示**という.

---
[3]対偶をとると,「任意の A の元 a_1, a_2 に対し, $f(a_1) = f(a_2)$ ならば $a_1 = a_2$ が成り立つ」となる.
[4]一般角で考えると, 2π の整数倍だけ不定性がある.

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 1 回 （逆井　2012 年 4 月 9 日）

小テスト問題

次の問題の解答を記入して下さい. 問題に断りがない限り, 答えのみを記したものは解答とは認めません.

[1] x を変数とする実係数多項式全体の集合 $\mathbb{R}[x]$ から実数全体の集合 $\mathbb{R}$ への写像

$$F : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$$

を, $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ に対して

$$F\left(f(x)\right) = f(1)$$

で定義するとき, 次に答えよ.

(1) 写像 $F : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ は単射**でない**ことを示せ.

(2) 写像 $F : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ は全射**である**ことを示せ.

学籍番号 ________________　　氏名 ________________________　　__________

[2]　複素数 z に関する方程式

$$z^3 = -1 - \sqrt{-1}$$

の解をすべて求め (極表示を書けばよい), 複素平面に図示せよ.

以上.

7 類 V クラス 線形代数学演習第一 第 1 回
演習課題解答

（逆井　2012 年 4 月 9 日出題）

小テスト解答

[1] (各 1 点)

(1) $F(x+1) = F(2x) = 2$ なので, F は単射ではない.

(2) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対し, 多項式 $f(x) = x + a - 1$ を考えると $F\left(f(x)\right) = a$ となるので, F は全射である.

[2] (2 点)

$z^3 = -1 - \sqrt{-1} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ であるから, 方程式の解は

$$\begin{aligned}
&\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + \sqrt{-1}\sin\frac{5\pi}{12}\right),\\
&\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + \sqrt{-1}\sin\frac{13\pi}{12}\right),\\
&\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{12} + \sqrt{-1}\sin\frac{21\pi}{12}\right)
\end{aligned}$$

の 3 つである. $\frac{5\pi}{12} = 75^\circ$, $\frac{13\pi}{12} = 195^\circ$, $\frac{21\pi}{12} = 315^\circ$ に注意して図示すればよい.

演習問題略解

[2] (1) $2 - 11\sqrt{-1}$　(2) $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\sqrt{-1}$　(3) -1　(4) 2

[3] (1) $\cos\frac{3\pi}{2} + \sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{2}$　(2) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

(3) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{6}\right)$

[5] (1) $z = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)$　(2) $z = \pm\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}\right)$