

幾何学特論第四講義資料 9

9 測地線と指数写像

この節では、とくに断らない限り、線型接続 ∇ はリーマン多様体 (M, g) のリーマン接続 (レビ・チビタ接続) とする。以下、 g による内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 、接ベクトルの大きさを $|\cdot|$ と書く。

■ 平行移動 曲線 $\gamma: I \rightarrow M$ に沿うベクトル場 X が (接続 ∇ に関して) γ に沿って平行 *parallel* である、とは $\nabla_{d\gamma/dt} X = 0$ が恒等的に成り立つことである。

命題 9.1. 多様体 M 上の可微分曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ と、任意の $v \in T_{\gamma(a)}M$ に対して、 γ に沿って平行なベクトル場 $X(t)$ で $X(a) = v$ となるものが唯一存在する。

証明: $X = (X^1, \dots, X^m)$ は線型常微分方程式

$$(9.1) \quad \frac{dX^j}{dt} + \sum_{i,k} \Gamma_{ik}^j \frac{dx^i}{dt} X^k = 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

の初期条件 $X^j(a) = v^j$ (v^j は v の成分) を満たす解である。

定義 9.2. 多様体 M 上の曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ の始点を $p = \gamma(a)$, $q = \gamma(b)$ とおくと、写像

$$P_\gamma: T_p M \ni v \mapsto P_\gamma v = X(b) \in T_q M \quad (X \text{ は命題 9.1 の結論に現れるベクトル場})$$

を γ に沿う平行移動という。

命題 9.3. 平行移動 $P_\gamma: T_p M \rightarrow T_q M$ は線型同型写像である。

証明: 方程式 (9.1) は線型方程式であるから線型性が従う。さらに γ の逆向きの曲線は P_γ の逆写像を与えるので、同型が言える。

命題 9.4. 曲線 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ に対して $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ とおく。このとき $Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\nabla_v Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t^{-1} Y(\gamma(t)) - Y(p)}{t}$$

である。ただし P_t は $\gamma|_{[0,t]}$ に関する平行移動である。

とくに ∇ がリーマン接続の場合は、次が成り立つ:

命題 9.5. リーマン多様体 M 上の曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ に関する平行移動は内積をもつ線型空間 $T_{\gamma(a)}M$ と $T_{\gamma(b)}M$ の間の等長変換を与える。

証明： 接ベクトル $X, Y \in T_{\gamma(a)}M$ に対して $X(a) = X, Y(a) = Y$ を満たし, γ に沿って平行なベクトル場 $X(t), Y(t)$ をとれば, ∇ がリーマン接続であるから, $X(t), Y(t)$ の平行性より

$$\frac{d}{dt} \langle X(t), Y(t) \rangle = \langle \nabla_{d/dt} X(t), Y(t) \rangle + \langle X(t), \nabla_{d/dt} Y(t) \rangle = 0$$

が成り立つ. したがって $\langle X(t), Y(t) \rangle$ は γ に沿って定数なので, とくに

$$\langle P_\gamma(X), P_\gamma(Y) \rangle = \langle X(b), Y(b) \rangle = \langle X(a), Y(a) \rangle = \langle X, Y \rangle$$

が成り立つ.

曲線 γ が測地線である, とは $\nabla_{d/dt} \dot{\gamma} = 0$ が成り立つ, すなわち速度ベクトル $\dot{\gamma}$ が γ に沿って平行となることであった. したがって, 命題 9.5 から次がわかる.

命題 9.6. リーマン多様体上の測地線 γ に対して

- (1) $|\dot{\gamma}|$ は一定である.
- (2) γ に沿う平行なベクトル場 $X(t)$ に対して $\langle \dot{\gamma}, X \rangle$ は一定である. とくにある 1 点で X と $\dot{\gamma}$ が直交しているならば, 至るところで直交している.

■測地線 測地線であるという性質はパラメータのとり方に依存する. とくに測地線のパラメータは弧長パラメータの定数倍でなければならない. さらに, 測地線 $\gamma(t)$ に対して $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(kt)$ (k は定数) はまた測地線である. したがって, 測地線は, 測地線である, という性質を保ったまま弧長パラメータで表すことができる.

命題 9.7. リーマン多様体 (M, g) 上の 2 点を結ぶ最短線が存在するならば, それは (パラメータを取り直せば) 測地線となる.

証明： 曲線 $\gamma(t)$ が 2 点 $p, q \in M$ を結ぶ最短線とする. とくに, パラメータを取り替えることで, t は弧長パラメータ ($0 \leq t \leq L$) として一般性を失わない.

曲線 γ の (端を固定した) 変分 variation とは, 可微分写像

$$\begin{aligned} F: (-\delta, \delta) \times (0, L) &\ni (\varepsilon, t) \mapsto F(\varepsilon, t) = \gamma_\varepsilon(t) \in M, \\ F(0, t) &= \gamma_0(t) = \gamma(t), \\ F(\varepsilon, 0) &= \gamma_\varepsilon(0) = \gamma(0) = p, \quad F(\varepsilon, L) = \gamma_\varepsilon(L) = \gamma(L) = q \end{aligned}$$

を満たすものである. 各 ε に対して γ_ε は曲線 γ を端点を固定して変形した曲線と思うことができる. ただし t は γ_ε の弧長パラメータとは限らない.

変分 F に対して

$$V(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} F(\varepsilon, t)$$

で与えられる γ に沿ったベクトル場を F の変分ベクトル場という. $\gamma_\varepsilon(0), \gamma_\varepsilon(L)$ は ε によらずに一定であるから, $V(0) = V(L) = 0$ であることがわかる.

逆に, $V(0) = V(L) = 0$ を満たす任意の γ に沿うベクトル場 V に対して, それを変分ベクトル場にもつ γ の変分が存在する. 実際, もし γ の像が一つの座標系 (x^j) で覆えるときは, $V = \sum V^j(t) \partial_j$ と書いて

$$F(\varepsilon, t) = (x^1(t) + \varepsilon V^1, \dots, x^m(t) + \varepsilon V^m) \quad \gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t))$$

とおけばよい. 一枚の座標系で覆えないときは, (曲線の像の) 単位の分割を用いてこのような変分を「つなげる」.
さて, 曲線 γ の最短性より, γ_ε の長さは γ より短くない. したがって

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathcal{L}(\gamma_\varepsilon) = 0 \quad \mathcal{L}(\gamma_\varepsilon) = \int_0^L |\dot{\gamma}_\varepsilon(t)| dt$$

が、任意の変分 $\{\gamma_\varepsilon\}$ に対して成立する．ただし $\mathcal{L}(\gamma)$ は曲線 γ の長さである．この式の左辺の微分を計算しよう：

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mathcal{L}(\gamma_\varepsilon) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \int_0^L \langle \dot{\gamma}_\varepsilon, \dot{\gamma}_\varepsilon \rangle^{1/2} dt \\
 &= \int_0^L \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \langle \dot{\gamma}_\varepsilon, \dot{\gamma}_\varepsilon \rangle^{1/2} dt \\
 &= \int_0^L \frac{\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \langle \dot{\gamma}_\varepsilon, \dot{\gamma}_\varepsilon \rangle}{2 \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{1/2}} dt \\
 &= \int_0^L \langle \nabla_{\partial/\partial \varepsilon} \dot{\gamma}_\varepsilon, \dot{\gamma}_\varepsilon \rangle \Big|_{\varepsilon=0} dt \\
 &= \int_0^L \left\langle \nabla_{\partial/\partial t} \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \gamma_\varepsilon, \dot{\gamma} \right\rangle dt \\
 &= \int_0^L \langle \nabla_{\partial/\partial t} V(t), \dot{\gamma} \rangle dt \\
 &= \int_0^L \left[\frac{d}{dt} \langle V(t), \dot{\gamma} \rangle - \langle V(t), \nabla_{d/dt} \dot{\gamma} \rangle \right] dt \\
 &= \langle V(t), \dot{\gamma} \rangle \Big|_0^L - \int_0^L \langle V(t), \nabla_{d/dt} \dot{\gamma} \rangle dt \\
 &= - \int_0^L \langle V(t), \nabla_{d/dt} \dot{\gamma} \rangle dt
 \end{aligned}$$

となる．仮定より、この右辺の値がいかなる変分に対しても 0 とならなければならない．そこで $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ をみたく正の値をとる実数値関数 $\varphi(t)$ をとり、 $V = \varphi \nabla_{d/dt} \dot{\gamma}$ とおけば、

$$\int_0^L \langle V(t), \nabla_{d/dt} \dot{\gamma} \rangle dt = \int_0^L \varphi(t) \langle \nabla_{d/dt} \dot{\gamma}, \nabla_{d/dt} \dot{\gamma} \rangle dt = 0$$

を得る． φ の正値性と計量の正値性から、これが成り立つためには $\nabla_{d/dt} \dot{\gamma} = 0$ でなければならない．

■ 指数写像 常微分方程式の基本定理より任意の $X \in TM$ を初速度とする測地線が十分短い範囲で存在する．そこで $X \in T_p M$ に対して

$$(9.2) \quad \gamma_X = [\gamma_X(0) = p, \dot{\gamma}_X(0) = X \text{ を満たす測地線}] \quad X \in T_p M$$

とする．定数 k に対して $\gamma_X(kt)$ もまた測地線であって、その初速度は kX であることから、測地線の一意性を用いれば

$$(9.3) \quad \gamma_{kX}(t) = \gamma_X(kt)$$

を得る．ただし、 t は左辺あるいは右辺が存在するようなパラメータの値である．いま

$$\delta_X := \sup \{ \delta \in \mathbf{R}_+ \mid \gamma_X \text{ は区間 } [0, \delta) \text{ で定義される} \} > 0, \quad X \in T_p M$$

とおく．ここで $\{X \in T_p M \mid |X| = 1\}$ は球面と同相であるからコンパクトであることに注意すれば、

$$\delta := \inf \{ \delta_X \mid X \in T_p M, |X| = 1 \}$$

は正の数である．これを用いて、内積が与えられた線型空間 $T_p M$ の原点の近傍

$$U_{p,\delta} := \{X \in T_p M \mid |X| < \delta\}$$

をとる．

ベクトル $X \in U_{p,\delta}$ に対して $\gamma_{X/|X|}$ は $[0, \delta)$ で定義されているから、 γ_X の定義域は $[0, 1)$ を含む．

定義 9.8. これまでの記号の下,

$$\exp_p: U_{p,\delta} \ni X \mapsto \gamma_X(1) \in M$$

を点 p における指数写像 *exponential map* という.

定義から

$$(9.4) \quad \gamma_X(t) := \exp_p tX \quad (X \in T_p M)$$

が成り立つ.

例 9.9. 単位球面 $S^n(1)$ 上の点 p と $v \in T_p S^n(1)$ に対して

$$\exp_p v = (\cos kt)p + (\sin kt)\frac{v}{k} \quad k = |v|$$

である.

接空間 $T_p M$ は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ によってユークリッド空間と同一視される. そこで $T_p M$ の原点 0 における接空間 $T_0(T_p M)$ を $T_p M$ と同一視すれば, $(d\exp_p)_0$ は $T_p M$ から $T_p M$ への線型写像である.

補題 9.10.

$$(d\exp_p)_0 = \text{id} = \text{恒等写像}.$$

証明: $T_p M$ の原点を通る曲線 $\nu(t) = tX$ ($X \in T_p M$) を取ると, $\dot{\nu}(0) = X$ であるから,

$$(d\exp_p)_0(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(\nu(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p tX = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_X(t) = X$$

である.

したがって, 逆関数定理より, 十分小さな正の数 δ' に対して

$$\exp_p: T_p M \supset U_{p,\delta'} \rightarrow V_p = \exp_p(U_{p,\delta'}) \subset M$$

は可微分同相写像である. とくに $T_p M$ をユークリッド空間と同一視すれば, p の近傍 V_p から $T_p M$ への写像 $\exp_p^{-1}$ は M の座標系を与える. これを正規座標系 *normal coordinate system* とよぶ.

■ 指数写像とヤコビ場

定義 9.11. 測地線 $\gamma(t)$ に沿うベクトル場 $Y(t)$ が γ に沿う ヤコビ場 *Jacobi field* であるとは,

$$\nabla_{d/dt} \nabla_{d/dt} Y - R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma} = 0$$

を満たすことである.

補題 9.12. 測地線 $\gamma: [0, \delta) \rightarrow M$ を固定する. このとき, 任意のベクトル $Y_0, Z_0 \in T_p M$ ($p = \gamma(0)$) に対して γ に沿うヤコビ場 Y で $Y(0) = Y_0, \nabla_{d/dt} Y(0) = Z_0$ となるものがただ一つ存在する.

証明: 局所座標系を用いれば, $Y(t)$ がヤコビ場であるための必要十分条件は Y の成分 Y^j に関する 2 階の線型常微分方程式になる.

大きさ 1 の接ベクトルからなる集合

$$S_p M = \{X \in T_p M \mid |X| = 1\}$$

は $T_p M$ 内の球面と見なすことができる． $S_p M$ 内の曲線

$$\xi: (-\varepsilon, \varepsilon) \ni u \longmapsto \xi(u) \in S_p M$$

に対して

$$(9.5) \quad F: [0, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \ni (t, u) \longmapsto F(t, u) = \exp_p t\xi(u) \in M$$

とおく．

補題 9.13. 式 (9.5) に対して，測地線 $\gamma(t) = F(t, 0)$ に沿うベクトル場

$$Y(t) := \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{u=0} F(t, u)$$

は $\dot{\gamma}$ に直交し $Y(0) = 0$ となるヤコビ場である．

証明： $u = 0$ において

$$\begin{aligned} \nabla_{d/dt} Y &= \nabla_{\partial/\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial u} \exp_p t\xi(u) \right) \\ &= \nabla_{\partial/\partial u} \left(\frac{\partial}{\partial t} \exp_p t\xi(u) \right) \\ &= \nabla_{\partial/\partial u} \dot{\gamma}_{\xi(u)}(t) \\ \nabla_{d/dt} \nabla_{d/dt} Y &= \nabla_{\partial/\partial t} \nabla_{\partial/\partial u} \dot{\gamma}_{\xi(u)}(t) \\ &= \nabla_{\partial/\partial u} \nabla_{\partial/\partial t} \dot{\gamma}_{\xi(u)}(t) + R \left(\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial u} \right) \dot{\gamma}_{\xi(u)}(t) \\ &= \nabla_{\partial/\partial u} \nabla_{\partial/\partial t} \dot{\gamma}(t) + R(\dot{\gamma}(t), Y(t)) \dot{\gamma}(t) \\ &= R(\dot{\gamma}(t), Y(t)) \dot{\gamma}(t) \end{aligned}$$

が成り立つ．

ヤコビ場 Y が $\dot{\gamma}$ に直交することは

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle Y, \dot{\gamma} \rangle &= \langle \nabla_{d/dt} Y, \dot{\gamma} \rangle + \langle Y, \nabla_{d/dt} \dot{\gamma} \rangle = \langle \nabla_{d/dt} Y, \dot{\gamma} \rangle = \langle \nabla_{\partial/\partial u} \dot{\gamma}_{\xi(u)}, \dot{\gamma}_{\xi(u)} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \langle \dot{\gamma}_{\xi(u)}, \dot{\gamma}_{\xi(u)} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} 1 = 0 \end{aligned}$$

であることと $Y(0) = 0$ から得られる．

問題

9-1 命題 9.7 の証明のための式変形を詳細に追いなさい．とくに一つ一つの等号が成り立つ理由を確かめなさい．

9-2 $T_p M$ に内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する正規直交基底 $\{e_1, \dots, e_m\}$ を取り，

$$T_p M \ni X = x^1 e_1 + \dots x^m e_m \leftrightarrow (x^1, \dots, x^m) \in \mathbf{R}^m$$

において $T_p M$ を $\mathbf{R}^m$ と同一視すると， $(x^1, \dots, x^m)$ は p の回りの正規座標系と見なすことができる．この座標系に関するクリストッフェル記号 Γ_{ij}^k は点 p において 0 となることを示しなさい．

9-3 定義 9.11 のヤコビ場の方程式を，局所座標を用いて表し，それが 2 階の線型常微分方程式であることを確かめなさい．

9-4 補題 9.13 の証明の式変形一つ一つの理由を確かめなさい．