

2011 年 11 月 29 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学特論第四講義資料 8

お知らせ

- 今回は、都合により提出物の受付をいたしません。申し訳ありません。

前回までの訂正

- 講義資料 7, 2 ページ, 下から 4 行目: (1)–(3) の性質 $\Rightarrow$ (1), (2), (4) の性質

授業に関する御意見

- もし時間があれば 7-2 のパズルのヒントをください. **山田のコメント:** あとで、覚えていたら.
- 先生はパズルが好きですか? **山田のコメント:** あまり

8 定曲率空間

■**曲線に沿うベクトル場と共変微分** 多様体 M から多様体 N への可微分写像 $f: M \rightarrow N$ に対して、微分写像 $df: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ をまた f_* と書くことがある。この節では、式が「ごちゃごちゃ」になることを避けるために後者の記号を用いる。

数直線上の区間 I から多様体 M への可微分写像を M の**曲線**という。パラメータ (I の座標) を t と書くとき、曲線 $\gamma: I \rightarrow M$ に対して

$$\dot{\gamma}(t) := \gamma_* \left(\frac{d}{dt} \right)_t \in T_{\gamma(t)} M$$

を γ の**速度ベクトル** という。 M の局所座標 (x^j) を用いて $\gamma(t) = (x^j(t))$ と書けば、

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_j \frac{dx^j}{dt}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{\gamma(t)} = \sum_j \frac{dx^j}{dt} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

である。

曲線 $\gamma: I \rightarrow M$ に**沿うベクトル場**とは、可微分写像 $X: I \rightarrow TM$ で $\pi \circ X = \gamma$ ($\pi: TM \rightarrow M$ はベクトル束の射影) を満たすものである。局所座標を用いれば、

$$(8.1) \quad X = \sum_j X^j(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{\gamma(t)} \quad X^j: I \xrightarrow{C^\infty} \mathbf{R}$$

と書ける。とくに、速度ベクトル $\dot{\gamma}(t)$ は γ に沿うベクトル場を与えている。

多様体 M 上に (振れない) 線型接続 ∇ が与えられているとする。座標系 (x^j) に関する接続係数を Γ_{ij}^k とするとき、曲線 $\gamma(t)$ に沿う (8.1) のようなベクトル場 X の $\dot{\gamma}$ 方向の**共変微分**を

$$(8.2) \quad \nabla_{\frac{d}{dt}} X := \sum_j \left(\frac{dX^j}{dt} + \sum_{i,k} \Gamma_{ik}^j \frac{dx^i}{dt} X^k \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{\gamma(t)}$$

と定める。

■**平行移動** 曲線 $\gamma: I \rightarrow M$ に沿うベクトル場 X が (接続 ∇ に関して) γ に沿って**平行** *parallel* である、とは $\nabla_{d/dt} X = 0$ が恒等的に成り立つことである。

命題 8.1. 多様体 M 上の可微分曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ と、任意の $v \in T_{\gamma(a)} M$ に対して、 γ に沿って平行なベクトル場 $X(t)$ で $X(a) = v$ となるものが唯一存在する。

証明: $X = (X^1, \dots, X^m)$ は線型常微分方程式

$$(8.3) \quad \frac{dX^j}{dt} + \sum_{i,k} \Gamma_{ik}^j \frac{dx^i}{dt} X^k = 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

の初期条件 $X^j(a) = v^j$ (v^j は v の成分) を満たす解である。

定義 8.2. 多様体 M 上の曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ の始点を $p = \gamma(a)$, $q = \gamma(b)$ とおくと、写像

$$P_\gamma: T_p M \ni v \mapsto P_\gamma v = X(b) \in T_q M \quad (X \text{ は命題 8.1 の結論に現れるベクトル場})$$

を γ に沿う平行移動という。

命題 8.3. 平行移動 $P_\gamma: T_p M \rightarrow T_q M$ は線型同型写像である。

証明： 方程式 (8.3) は線型方程式であるから線型性が従う。さらに γ の逆向きの曲線は P_γ の逆写像を与えるので、同型と言える。

命題 8.4. 曲線 $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ に対して $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ とおく。このとき $Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\nabla_v Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t^{-1} Y(\gamma(t)) - Y(p)}{t}$$

である。ただし P_t は $\gamma|_{[0,t]}$ に関する平行移動である。

■測地線 以下では、リーマン多様体 (M, g) のリーマン接続について考える。

定義 8.5. 曲線 $\gamma: I \rightarrow M$ が測地線 *geodesic* である、とは $\nabla_{d/dt} \dot{\gamma} = 0$ が成り立つことである。

M の局所座標系 (x^j) を用いると、 $\gamma = (x^j(t))$ が測地線であるための条件は

$$(8.4) \quad \frac{d^2 x^j}{dt^2} + \sum_k \Gamma_{ik}^j \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

である。これを測地線の方程式という。これは、平行移動の方程式と違って非線型なので、解が大域的に存在するとは限らない。解の存在と一意性の定理より

命題 8.6. 任意の点 $p \in M$ と $v \in T_p M$ に対して、 $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ となる測地線 $\gamma: (-a, b) \rightarrow M$ がただ一つ存在する。ただし a, b は十分小さい正の数である。

命題 8.7. 測地線 $\gamma(t)$ の速度ベクトル $\dot{\gamma}(t)$ の大きさは一定である。

証明： ∇ がリーマン接続であることから

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 2 \langle \nabla_{d/dt} \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$$

である。

とくに「測地線である」ということは曲線のパラメータの取り方に依存するが、 $\gamma(t)$ が測地線なら、定数 k に対して $\gamma(kt)$ も測地線である。以下、とくに断らない限り、測地線 γ は弧長によりパラメータづけられているとする： $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 1$ 。

定理 8.8. リーマン多様体 M 上の 2 点 p, q を結ぶ曲線のうち、長さが最小のもの（すなわち長さ $d(p, q)$ の曲線）は測地線である。

証明は後回しにする。定理 8.8 の仮定を満たす測地線 γ を p と q を結ぶ最短測地線という。

定理 8.9 (Hopf-Rinow の定理). リーマン多様体 (M, g) に対して、次は同値である：

- (1) リーマン計量から定まる距離 d に関して (M, d) は完備である.
- (2) M 上の一つの点 p を固定したとき, 任意の $v \in T_p M$ に対して $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$ となる測地線 γ の定義域が $\mathbf{R}$ 全体まで拡張される.
- (3) M 上の**任意の**点 p と任意の $v \in T_p M$ に対して $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$ となる測地線 γ の定義域が $\mathbf{R}$ 全体まで拡張される.
- (4) M 上の任意の相異なる 2 点 p, q を結ぶ最短測地線が存在する.
- (5) M 上の一つの点 p を固定したとき, 閉距離球 $\{q \mid d(p, q) \leq r\}$ はコンパクト.
- (6) M 上の, 任意の発散する道の長さは無限大である.

■空間型 (1) —ユークリッド空間

定義 8.10. 完備なリーマン多様体で, 断面曲率が一定であるようなものを**空間型** *space form* という.

例 8.11. ユークリッド空間 $(\mathbf{R}^n, g_0)$ のリーマン接続 (レビ・チビタ接続) を D とすると, 標準座標系に関して $\Gamma_{ij}^k = 0$ となっている. すなわち, 標準座標系はアファイン座標系となっているから, D の曲率テンソルは消える. したがって $\mathbf{R}^n$ の断面曲率は恒等的に 0 となる. また, 測地線が直線となるので, Hopf-Rinow の定理より $\mathbf{R}^n$ は完備.

したがって, $\mathbf{R}^n$ は単連結かつ平坦な空間型である.

■写像に沿う共変微分 平坦でない空間型を具体的に調べるために, 曲線に沿う共変微分を一般化する.

定義 8.12. 多様体 M から N への可微分写像 $f: M \rightarrow N$ に対して, f に沿うベクトル場とは, 可微分写像

$$X: M \rightarrow TN \quad (\pi \circ X = f)$$

のことである.

さらに, $p \in M, v \in T_p M$ に対して $\gamma(0) = p, \dot{\gamma}(0) = v$ を満たす M 上の曲線 γ を用いて

$$\nabla_v X = \nabla_{d/dt} X \circ \gamma$$

と定める. 右辺は γ の取り方によらない.

補題 8.13. 定義 8.12 の状況で, N の接続 ∇ の振率が消えているなら,

$$\nabla_X f_* Y - \nabla_Y f_* X = f_* [X, Y]$$

が成り立つ.

■球面 正の定数 r に対して

$$M = S^n(r) := \left\{ p = (p^1, \dots, p^{n+1}) \mid \langle p, p \rangle = \sum_{j=1}^{n+1} (p^j)^2 = r^2 \right\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$$

とおくと, これはユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ の部分多様体である. $\mathbf{R}^{n+1}$ の計量から誘導される $S^n(r)$ の計量を g とする.

点 $\mathbf{p} \in M$ における接空間 $T_{\mathbf{p}}M$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ 内のベクトル $\mathbf{p}$ の直交補空間である。すなわち、次の直交直和分解

$$(8.5) \quad \mathbf{R}^{n+1} = T_{\mathbf{p}}M \oplus \mathbf{R}\mathbf{p}$$

がある。

ベクトル場 $Y \in \mathfrak{X}(M)$ は、包含写像 $\iota: S^n(r) \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ に沿ったベクトル場である。ユークリッド空間の標準接続を D と書き、ベクトル場 $Y \in T_{\mathbf{p}}M$ に対して、 $D_Y X$ を (8.5) にしたがって

$$D_Y X := \nabla_Y X + h(X, Y)\mathbf{p} \quad \nabla_Y X \in TM, \quad h(X, Y) \in \mathbf{R}$$

と分解する。とくに、 $\langle D_Y X, \mathbf{p} \rangle = h(X, Y) \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = r^2 h(X, Y)$ であるが、左辺は

$$\langle D_Y X, \mathbf{p} \rangle = Y \langle X, \mathbf{p} \rangle - \langle X, D_Y \mathbf{p} \rangle = -\langle X, Y \rangle$$

なので、 $h(X, Y) = -r^{-2} \langle X, Y \rangle$ 。すなわち、

$$(8.6) \quad \nabla_Y X := D_Y X + \frac{1}{r^2} \langle X, Y \rangle \mathbf{p}$$

を得る。

補題 8.14. 式 (8.6) で定まる ∇ は誘導計量 g に関するリーマン接続である。

証明： まず $\nabla_X Y(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}M$ であることを示す。式 (8.6) の両辺に $\mathbf{p}$ を内積すると $\langle \nabla_X Y, \mathbf{p} \rangle = 0$ となる。ここで $T_{\mathbf{p}}M = \{\mathbf{p}\}^\perp$ に注意すれば結論がわかる。

さらに、リーマン接続の性質

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \quad X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

を示せばよい。

このリーマン接続 ∇ の曲率テンソルを計算する。 D は $\mathbf{R}^{n+1}$ の平坦な接続であることと ∇ がリーマン接続であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= D_X \nabla_Y Z + \frac{1}{r^2} \langle X, \nabla_Y Z \rangle \mathbf{p} \\ &\quad - D_Y \nabla_X Z - \frac{1}{r^2} \langle Y, \nabla_X Z \rangle \mathbf{p} - D_{[X, Y]} Z - \frac{1}{r^2} \langle [X, Y], Z \rangle \mathbf{p} \\ &= D_X D_Y Z + \frac{1}{r^2} D_X \langle Y, Z \rangle \mathbf{p} + \frac{1}{r^2} \langle X, \nabla_Y Z \rangle \mathbf{p} \\ &\quad - D_Y D_X Z - \frac{1}{r^2} D_Y \langle X, Z \rangle \mathbf{p} - \frac{1}{r^2} \langle Y, \nabla_X Z \rangle \mathbf{p} \\ &\quad - D_{[X, Y]} Z - \frac{1}{r^2} \langle [X, Y], Z \rangle \mathbf{p} \\ &= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z \\ &\quad + \frac{1}{r^2} (X \langle Y, Z \rangle \mathbf{p} + \langle Y, Z \rangle D_X \mathbf{p} - Y \langle X, Z \rangle \mathbf{p} - \langle X, Z \rangle D_Y \mathbf{p} - \langle [X, Y], Z \rangle \mathbf{p}) \\ &\quad + \frac{1}{r^2} (\langle X, \nabla_Y Z \rangle \mathbf{p} - \langle Y, \nabla_X Z \rangle \mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{r^2} (\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y) \end{aligned}$$

である。このことから $S^n(r)$ の断面曲率が $1/r^2$ になることがわかる。

さらに, $S^n(r)$ はコンパクトであるから, Hopf-Rinow の定理より完備。したがって $S^n(r)$ は完備単連結な空間型である。

以下, 簡単のために $r = 1$ とし, $S^n = S^n(1)$ と書く。このリーマン多様体の測地線を求めよう。点 $\mathbf{p} \in S^n$ と $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S^n$ は互いに直交する $\mathbf{R}^{n+1}$ の単位ベクトルである。そこで

$$\gamma(t) := (\cos t)\mathbf{p} + (\sin t)\mathbf{v}$$

とおけば, $\gamma(t)$ は S^n 上の曲線となっている。実際,

$$\nabla_{d/dt}\dot{\gamma} = D_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} + \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \gamma = \ddot{\gamma} + \gamma = 0.$$

■双曲空間 球面と同じことを, ミンコフスキー空間の「球面」で行えば, 負曲率空間型を構成することができる。

まず, ミンコフスキー空間 L^{n+1} のレヴィ・チビタ接続は, $\mathbf{R}^{n+1}$ のリーマン接続 D と全く同じものであることに注意する。正の定数 r に対して

$$H^n(r) := \left\{ \mathbf{p} \in L^{n+1} \mid \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = -\frac{1}{r^2}, p^0 > 0 \right\}$$

とおく。ただし $\mathbf{p} = (p^0, \dots, p^n)$ とおき, ミンコフスキー内積は第一座標が負の符号に対応するようとしている。

ここで, L^{n+1} のミンコフスキー内積を TH^n に制限すると, これは $H^n(r)$ のリーマン計量 g を与えている。球面の場合とほぼ同様に

$$\nabla_X Y := D_X Y - \frac{1}{r^2} \langle X, Y \rangle \mathbf{p}$$

とおけば, ∇ が g のリーマン接続であることがわかる。この曲率テンソルを計算すれば $(H^2(r), g)$ が, 負の定曲率 $-1/r^2$ をもつ単連結リーマン多様体であることがわかる。

さらに, $r = 1$ のとき, 点 $\mathbf{p}$ における単位接ベクトル $\mathbf{v}$ をとると, $\langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle = 0$ だから

$$\gamma(t) := (\cosh t)\mathbf{p} + (\sinh t)\mathbf{v}$$

は, $\mathbf{p}$ を速度 $\mathbf{v}$ で出発する $H^2(r)$ 上の測地線である。とくに $\gamma(t)$ の定義域は $\mathbf{R}$ だから, 完備性が言える。