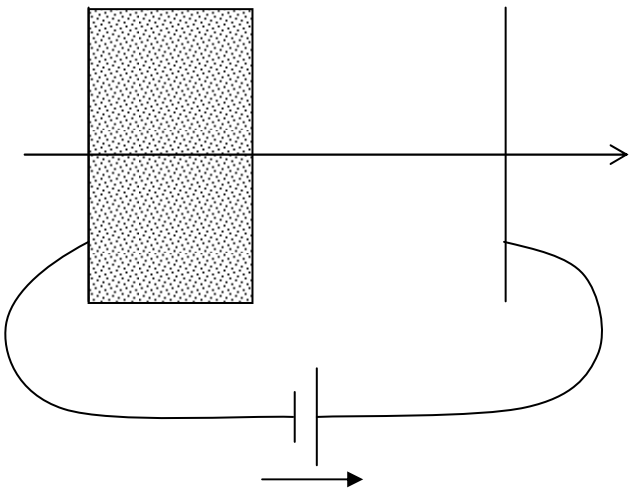
電磁気学Ⅰ　演習 第８回 解答

26’. 図のように 2 枚の平行平板が $x=0, x=b$ に置かれ、y - z 方向に無限に広がっている。平行平板の間の一部 $0 \le x \le a$ に電荷密度 ρ の領域がある。平行平板間に電圧 V が与えられているとき、電位(電池の負側を 0 とする)と電界を求めよ。



【解答】

(1)

(a) ポアソン（ラプラス）方程式を解く

(i) $0 \le x \le a$ のとき

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\phi = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} x^2 + A_1 x + A_2$$

(ii) $a \le x \le b$ のとき

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

$$\phi = B_1 x + B_2$$

(b) 境界条件、連続・滑らか条件 → (a)の積分定数を決定する

$$\begin{cases} \phi\big|_{x=0} = A_2 = 0 \\ \phi\big|_{x=b} = B_1 b + B_2 = V \end{cases} \quad \text{(境界条件)}$$

$$\begin{cases} \phi\big|_{x=a} = -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2 + A_1 a + A_2 = B_1 a + B_2 \\ \left.\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=a} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}a + A_1 = B_1 \end{cases} \quad \text{(連続・滑らか条件)}$$

電界が連続である理由は、$x = a$ の層に起電力がないからである。また、電界が滑らかである理由は境界の表面電荷密度が 0 だから（電束密度の法線成分の境界条件）である。未知数 4 個(A_1, A_2, B_1, B_2)、方程式 4 個なので、未知数を決定できる。

$$\begin{cases} -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2 + \left(B_1 + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}a\right)a = B_1 a + B_2 \\ B_1 b + B_2 = V \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_2 = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2 \\ B_1 b + B_2 = V \end{cases}, \quad B_1 = \frac{1}{b}(V - B_2) = \frac{1}{b}\left(V - \frac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2\right)$$

$$\therefore \quad A_1 = \frac{1}{b}\left(V - \frac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2\right) + \frac{\rho}{\varepsilon_0}a,\ A_2 = 0,\ B_1 = \frac{1}{b}\left(V - \frac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2\right),\ B_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2$$

よって、

$$\phi = \begin{cases} -\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2 + \left\{\dfrac{1}{b}\left(V - \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2\right) + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}a\right\}x & (0 \le x < a) \\ \dfrac{1}{b}\left(V - \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2\right)x + \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2 & (a \le x \le b) \end{cases}$$

電界は、

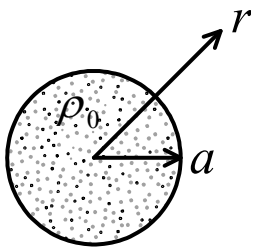
$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}x - \left\{\dfrac{1}{b}\left(V - \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2\right) + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}a\right\} & (0 \le x < a) \\ -\dfrac{1}{b}\left(V - \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}a^2\right) & (a \le x \le b) \end{cases}$$

■

27. 図のように電荷密度 $\rho\,[C/m^3]$ の分布を

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & (r \le a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$$

とする点対称の電荷分布がある。ポアソンの方程式を解いて半径 r の球面上での電位と電界を求めよ。無限遠の電位を基準(0)とし、中心の電位は無限大に発散しないことに注意すること。



【解答】

(i) $r \le a$ のとき

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}r^2$$

$$r^2\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r^3 + A$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r + \frac{A}{r^2}$$

$$\phi = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2 - \frac{A}{r} + B$$

$r = 0$ で ϕ は有限な値を取るので、 $A = 0$

$$\phi = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}r^2 + B$$

(ii) $r > a$ のとき

$$\nabla^2\phi = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)=0$$

$$r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}=C$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{C}{r^2}$$

$$\phi=-\frac{C}{r}+D$$

$r=\infty$ で $\phi=0$ なので、$D=0$

$$\phi=-\frac{C}{r}$$

【境界条件】

$r=a$ で ϕ および $\partial\phi/\partial r$ は連続なので、

$$\begin{cases}-\dfrac{\rho_0}{6\varepsilon_0}a^2+B=-\dfrac{C}{a} & (\phi(a-0)=\phi(a+0))\\ -\dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}a=\dfrac{C}{a^2} & (\phi'(a-0)=\phi'(a+0))\end{cases}$$

よって、

$$C=-\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}a^3$$

$$B=-\frac{C}{a}+\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}a^2=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}a^2+\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}a^2=\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}a^2$$

まとめると、

$$\phi=\begin{cases}\dfrac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\left(3a^2-r^2\right) & (r\le a)\\ \dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r} & (r>a)\end{cases}$$

電界は r 成分しか持たない。

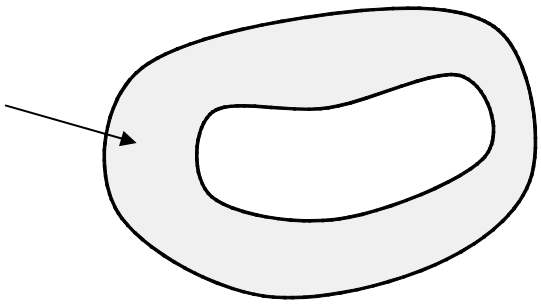
$$E_r=\begin{cases}\dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}r & (r\le a)\\ \dfrac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2} & (r>a)\end{cases}$$

■

23’. 任意形状帯電導体に囲まれた空洞内の静電界

図のように任意形状の導体とそれに囲まれた空洞（電荷は存在しない）がある。今導体に電荷を与えたとするとそれはどのように導体上に分布するであろうか？空洞内に電界は発生するか？導体が球殻となっている場合は対称性により電荷は導体の外側表面に均一に分布し、空洞内に電界は存在しないことがわかる。では導体形状が任意ではどうなるだろうか？この場合も電荷は導体の外側表面に分布し、空洞内には電界が存在しない。このことを、解の一意性とガウスの法則を用いることにより説明せよ。

ヒント：まず、空洞に面している導体の電位分布はどのようになるかを考え、解の一意性を考慮しその電位分布を決定し、空洞内の電界を求める。その後、適当な閉曲面においてガウスの法則を用い電荷を求める。



【解答】

・（空洞内の電界の説明）導体中の電界は 0 であるので、導体中のどのような経路で積分しても電位差は 0 であり、よって導体中はすべて等電位になる。もちろん空洞に面している導体も全て等電位であるため、「空洞内で電位$\phi =$一定」は解である。解の一意性より、「空洞内で電位$\phi =$一定」以外の解はありえない。これより、空洞内での電界は$\mathbf{E} = -\nabla\phi = 0$であることがわかる。

・（電荷分布の説明）導体の金属部分を通る閉曲面 S を考えて、ガウスの法則を適用すると、電界は 0 なので、内部の電荷の総和は 0 である。S 内ではいたるところ、電界は 0 なので、電荷はどこにも存在しない。よって導体に与えられた電荷は全て導体の外側表面に存在している。■