電磁気学Ｉ　演習 第５回 解答

6’’. (1)　Fig. 6(a)のように半径 r の円輪を線電荷密度σで一様に帯電させるとき、円輪の中心を通り垂直な軸上（z 軸上）の電界を微小円輪の微小電荷σdl がつくる電界を足し合わせることにより求めよ。

(2)　もし線電荷が r 方向に微小幅 dr を持ち、バームクーヘン状になっているとき、これが z 軸上につくる電界は(1)の結果から、線電荷密度σ を面電荷密度σ' に置き換え、それに dr をかけたものになる。それを踏まえ、Fig. 6(b)のように、半径 a の円盤が面電荷密度σ'で一様に帯電しているとき、同様に z 軸上に作る電界を求めよ。

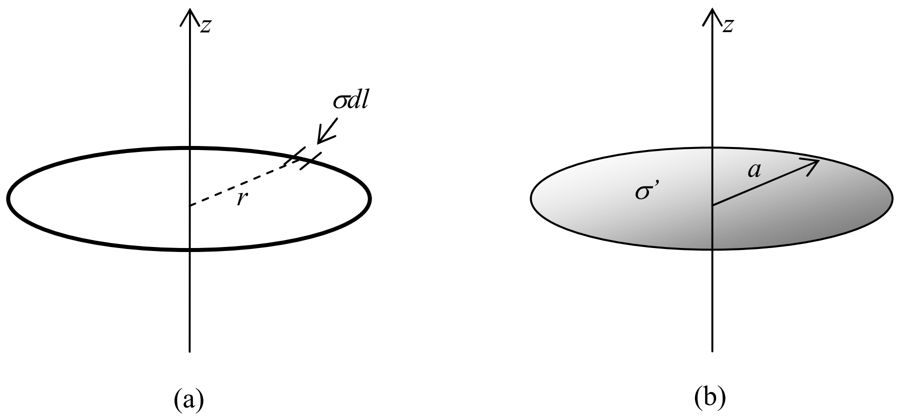


Fig. 6’’

【解答】

(1)

対称性より、電界は z 成分しか持たない。微小線分が作る z 方向の電界は、

$$dE_z = \frac{z\sigma}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}dl = \frac{z\sigma}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}rd\varphi$$

であるので、

$$\begin{aligned}E_z &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{z\sigma}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}rd\varphi \\ &= \frac{z\sigma r}{2\varepsilon_0\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}\end{aligned}$$

(2)

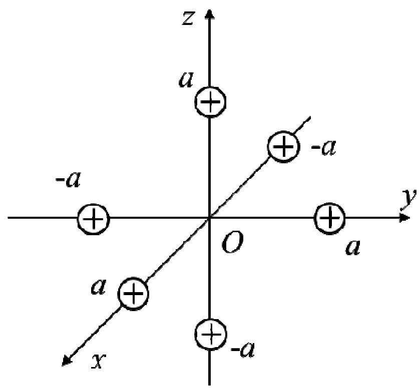
問題文の通り、微小バームクーヘンが作る z 方向の電界は、

$$dE_z = \frac{z\sigma' r}{2\varepsilon_0 \left(r^2+z^2\right)^{3/2}} dr$$

よって、

$$E_z = \int_{r=0}^{a} \frac{z\sigma' r}{2\varepsilon_0 \left(r^2+z^2\right)^{3/2}} dr$$
$$= \frac{z\sigma'}{2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\right]_0^a$$
$$= \frac{z\sigma'}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|z|}-\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)$$

6’’’. 6 つの点電荷 $q/6$ が図のように配置されている。 x 軸上 $(x \geq 0)$ 上の電界を求め、概形を図示せよ。また、点電荷 q が 1 つだけ原点にある場合の電界と比較せよ。



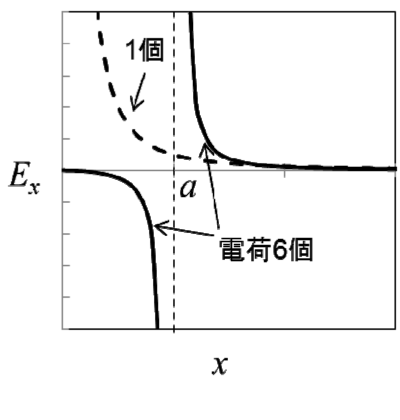
【解答】

(i) $x < a$ のとき

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{6}\left[-\frac{1}{(a-x)^2}+\frac{1}{(a+x)^2}+\frac{4}{a^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]$$

(ii) $x \geq a$ のとき

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{6}\left[\frac{1}{(a-x)^2}+\frac{1}{(a+x)^2}+\frac{4}{a^2+x^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right]$$



電荷が中心に 1 個のときは

$E_x = q/4\pi\varepsilon_0 x^2$