

電磁気学 I 演習 第 4 回

【VA-64'】以下のベクトルの回転を求めよ。

$$(1) \quad xz^2\hat{x} + 2yz\hat{y} - xy^2\hat{z}$$

$$(2) \quad \rho^2\hat{\rho} + \sin\varphi\hat{\phi} - z\hat{z}$$

$$(3) \quad \cos\theta\hat{r}$$

解答

(1)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz^2 & 2yz & -xy^2 \end{vmatrix} \\ &= \hat{x} \begin{vmatrix} \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2yz & -xy^2 \end{vmatrix} + \hat{y} \begin{vmatrix} \partial/\partial z & \partial/\partial x \\ -xy^2 & xz^2 \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ xz^2 & 2yz \end{vmatrix} \\ &= -2(x+1)y\hat{x} + (2xz+y^2)\hat{y} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\phi} & \hat{z} \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ \rho^2 & \rho\sin\varphi & -z \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho} \left\{ \hat{\rho} \begin{vmatrix} \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ \rho\sin\varphi & -z \end{vmatrix} + \rho\hat{\phi} \begin{vmatrix} \partial/\partial z & \partial/\partial\rho \\ -z & \rho^2 \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi \\ \rho^2 & \rho\sin\varphi \end{vmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{\rho} \left[\hat{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial\varphi}(-z) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho\sin\varphi) \right\} + \rho\hat{\phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial z}(\rho^2) - \frac{\partial}{\partial\rho}(-z) \right\} + \hat{z} \left\{ \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sin\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho^2) \right\} \right] \\ &= \frac{\sin\varphi}{\rho} \end{aligned}$$

(3)

$$\frac{1}{r^2\sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2\sin\theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\phi} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \\ \cos\theta & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sin\theta}{r} \hat{\phi}$$

【VA-67'】 Fig. VA-67' で表されるような $r=1, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ で定義される半球を考える。まず $\theta = \pi/2$ の水平面と半球曲面が交わる円上の経路 C に対して $\mathbf{A} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ の接線線積分を求めよ。ただし、積分経路は上方向($\theta=0$)を見て右回りとする。また、半球の面 S に対して $\mathbf{A}$ の回転の法線面積分（面素ベクトルの向きは球面から外に向かう方向）を求め、ストークスの定理が成立していることを確認せよ。

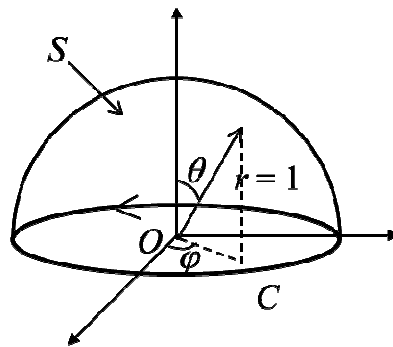


Fig. VA-67'

解答

計算は球座標で行う。線積分は、

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} r \sin \theta d\varphi \Big|_{r=1, \theta=\pi/2}$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

次に、回転を求める。

$$\text{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\varphi} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ A_r & rA_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\varphi} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial \theta & \partial/\partial \varphi \\ 0 & 0 & r \sin \theta \end{vmatrix} = \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \hat{r} + \frac{1}{r^2} \hat{\theta}$$

$$\begin{aligned}
\iint_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} \hat{r} \cdot \hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \Big|_{r=1} \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta d\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = 2\pi
\end{aligned}$$

よって、ストークスの定理が成立していることが確認できた。

【VA-87】 u をスカラー関数、 $\mathbf{A}$ をベクトル関数とすると、以下の公式が成り立つことを示せ。

$$(1) \quad \nabla \times (u\mathbf{A}) = \nabla u \times \mathbf{A} + u \nabla \times \mathbf{A}$$

$$(2) \quad \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

解答

(1)

$\nabla \times (u\mathbf{A}) = \nabla u \times \mathbf{A} + u \nabla \times \mathbf{A}$ の証明

$\nabla \times (u\mathbf{A})$ の x 成分は

$$\begin{aligned}
(\nabla \times (u\mathbf{A}))_x &= \frac{\partial (uA_z)}{\partial y} - \frac{\partial (uA_y)}{\partial z} \\
&= A_z \frac{\partial u}{\partial y} - A_y \frac{\partial u}{\partial z} + u \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = (\nabla u \times \mathbf{A} + u \nabla \times \mathbf{A})_x
\end{aligned}$$

他の成分も同様であるから

$$\nabla \times (u\mathbf{A}) = \nabla u \times \mathbf{A} + u \nabla \times \mathbf{A}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\
&= \hat{x} \begin{vmatrix} \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_y & A_z \end{vmatrix} - \hat{y} \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial z \\ A_x & A_z \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ A_x & A_y \end{vmatrix} \\
&= \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \hat{y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = 0$$