

電磁気学 I 演習 第3回 解答

【VA-28】以下の勾配をカルテシアン座標において計算せよ。

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

解答

$$\nabla A = \frac{\partial A}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial A}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial A}{\partial z} \hat{z} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \hat{z} \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \hat{x} - \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y \hat{y} - \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z \hat{z} \\ &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}) \end{aligned}$$

【VA-44】次のベクトルの発散をカルテシアン座標（直交座標）において計算せよ。

$$\frac{x\hat{x} - y\hat{y}}{x + y}$$

解答

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \text{ より、} \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x+y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x+y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (0) \\ &= \frac{1 \cdot (x+y) - x \cdot 1}{(x+y)^2} + \frac{-1 \cdot (x+y) + y \cdot 1}{(x+y)^2} \\ &= \frac{y-x}{(x+y)^2} \end{aligned}$$

【VA-45】円筒座標における次のベクトルの発散を求めよ。

$$\frac{\rho \hat{\rho} + z \hat{z}}{\rho^2 + z^2}$$

解答

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\rho \hat{\rho} + z \hat{z}}{\rho^2 + z^2} \right) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\rho}{\rho^2 + z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{\rho^2 + z^2} \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{2\rho(\rho^2 + z^2) - \rho^2 \cdot 2\rho}{(\rho^2 + z^2)^2} + \frac{(\rho^2 + z^2) - z \cdot 2z}{(\rho^2 + z^2)^2} \\ &= \frac{1}{\rho^2 + z^2} \end{aligned}$$

【VA-46】 球座標における次のベクトルの発散を求めよ。

$$e^{-r/\lambda} \hat{r} + \frac{1}{\tan \theta} \hat{\theta} + 3\hat{\phi}$$

解答

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (e^{-r/\lambda} \hat{r}) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 e^{-r/\lambda}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (3) \\ &= \frac{1}{r^2} (2r e^{-r/\lambda} - r^2 e^{-r/\lambda} / \lambda) - \frac{1}{r} = \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\lambda} \right) e^{-r/\lambda} - \frac{1}{r} \end{aligned}$$

【VA-50】 円柱 $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$ の全表面に関する $\mathbf{A} = x\hat{x} - y\hat{y} + (z^2 - 1)\hat{z}$ の法線

面積分を求めよ。ただし、面素ベクトルは円柱の外向きとする。また、円柱の内部に対して $\mathbf{A}$ の発散の体積積分を求めてガウスの定理が成り立つことを確認せよ。

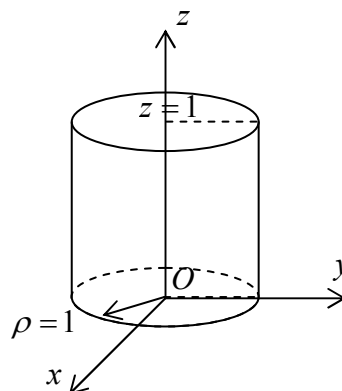
ヒント：直交座標系を円筒座標系に変換を行う。直交座標系の各単位ベクトルと円筒座標系の ρ 方向の単位ベクトルの内積は $\hat{x} \cdot \hat{\rho} = \cos \varphi$, $\hat{y} \cdot \hat{\rho} = \sin \varphi$, $\hat{z} \cdot \hat{\rho} = 0$ となる。

解答**[面積分]**

側面での積分

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{x} \cdot \hat{\rho} = \cos \varphi \\ \hat{y} \cdot \hat{\rho} = \sin \varphi \\ \hat{z} \cdot \hat{\rho} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{=\hat{\rho}d\varphi dz} &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^1 (x\hat{x} - y\hat{y} + (z^2 - 1)\hat{z}) \cdot (\hat{\rho}d\varphi dz) \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^1 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi dz \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} (2\cos^2 \varphi - 1) d\varphi \int_{z=0}^1 dz \\ &= 2\pi - 2\pi = 0 \end{aligned}$$



下面での積分

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{x} \cdot \hat{z} = 0 \\ \hat{y} \cdot \hat{z} = 0 \\ \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{=-\hat{z}\rho d\rho d\varphi} &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} (x\hat{x} - y\hat{y} + (0^2 - 1)\hat{z}) \cdot (-\hat{z}\rho d\rho d\varphi) \\ &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho d\rho d\varphi \\ &= \underbrace{\int_{\rho=0}^1 \rho d\rho}_{=1/2} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \\ &= \pi \end{aligned}$$

上面での積分

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{=\hat{z}\rho d\rho d\varphi} &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} (x\hat{x} - y\hat{y} + (1^2 - 1)\hat{z}) \cdot (\hat{z}\rho d\rho d\varphi) \\ &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} 0 \rho d\rho d\varphi \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって、

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \pi$$

[体積積分]

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 1 - 1 + 2z = 2z$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^1 (2z) \rho d\rho d\varphi dz \\ &= \int_{\rho=0}^1 \rho d\rho \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{z=0}^1 (2z) dz \\ &= \pi \end{aligned}$$

よって、ガウスの発散定理 $\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv$ が成り立っている。