# 電磁気学Ｉ　演習 第２回　解答

【VA-17】3つの座標平面および3つの平面 $x=1, y=1, z=1$ で囲まれた立方体がある。その立方体の各面に関する $\mathbf{A}=(x^2-y^2)\hat{\mathbf{x}}+2xy\hat{\mathbf{y}}+(y^2-xy)\hat{\mathbf{z}}$ の法線面積分の値とその和を求めよ。ただし、面素ベクトルは外側を向いているとする。

<u>解答</u>

平面 $x=0$

$$\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}\mathbf{A}\big|_{x=0}\cdot(-\hat{x})dydz=\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}(y^2)dydz=\int_{y=0}^{1}y^2dy\int_{z=0}^{1}dz=\frac{1}{3}$$

平面 $x=1$

$$\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}\mathbf{A}\big|_{x=1}\cdot\hat{x}dydz=\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1}(1-y^2)dydz=\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

平面 $y=0$

$$\int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{1}\mathbf{A}\big|_{y=0}\cdot(-\hat{y})dydz=\int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{1}0dxdz=0$$

平面 $y=1$

$$\int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{1}\mathbf{A}\big|_{y=1}\cdot\hat{y}dxdz=\int_{x=0}^{1}\int_{z=0}^{1}2xdxdz=\left[x^2\right]_0^1=1$$

平面 $z=0$

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\mathbf{A}\big|_{z=0}\cdot(-\hat{z})dxdy=-\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}(y^2-xy)dxdy=-\int_{y=0}^{1}\left[y^2x-\frac{x^2y}{2}\right]_{x=0}^{1}dy=\int_{y=0}^{1}\left(y^2-\frac{y}{2}\right)dy$$

$$=-\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{4}\right]_0^1=-\frac{1}{12}$$

平面 $z=1$

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\mathbf{A}\big|_{z=1}\cdot\hat{z}dydz=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}(y^2-xy)dxdy=\int_{y=0}^{1}\left[y^2x-\frac{x^2y}{2}\right]_{x=0}^{1}dy=\int_{y=0}^{1}\left(y^2-\frac{y}{2}\right)dy$$

$$=\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{4}\right]_0^1=\frac{1}{12}$$

よって、

$$\oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = 2$$

【VA-19'】$\mathbf{F} = x^2 z\hat{\mathbf{x}} + yz\hat{\mathbf{y}} + xyz\hat{\mathbf{z}}$ について $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ を求めよ。$S$はFig.19'のように$z$軸上に中心があり，$xy$面に平行で $z = 4$ 、$0 \le \varphi \le \pi/2$、半径2の扇型である。

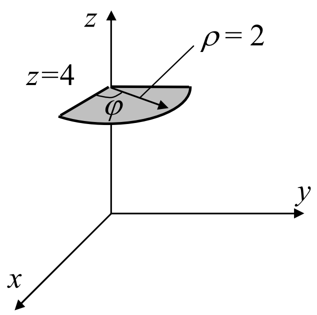


Fig. 19'

解答

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\rho=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathbf{F}\big|_{z=4}\cdot\hat{z}\rho d\rho d\varphi = 4\int_{\rho=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\rho^3 \sin\varphi\cos\varphi d\rho d\varphi = 2\int_{\rho=0}^{2}\rho^3 d\rho = 8$$

【VA-20】ベクトル場 $\mathbf{F} = r\sin\theta\hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\varphi}$ について， $r = 1, 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le \varphi \le 2\pi$ で定義される閉曲面から出るフラックス（ベクトル場の法線面積分）を求めよ。ただし、閉曲面は上側の半球と$xy$平面から構成される。

解答

上側の半球 $S_1$ 上では $r = 1$ より面積素は

$$d\mathbf{S} = \sin\theta d\theta d\varphi\hat{\mathbf{r}}$$

であるから

$$\int_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\ d\varphi\ d\theta = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \pi\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2}$$

下側の平面 $S_2$ 上では $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ より面積素は

$$d\mathbf{S} = r\ dr\ d\varphi\ \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

であるから

$$\int_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^1\int_0^{2\pi} r\ d\varphi\ dr = 2\pi\int_0^1 rdr = \pi\left[r^2\right]_0^1 = \pi$$

よって求める値は $\dfrac{\pi^2}{2} + \pi$

【VA-24】半径 $a$ [m]の球が原点を中心に置かれている。球の密度[kg/m$^3$]が $\dfrac{1}{a}(a-r)$ で表されるとき、球の重さ[kg]を求めよ。

<u>解答</u>

密度を $\rho(r) = \dfrac{1}{a}(a-r)$ [kg/m$^3$]とすると、球の重さは次の体積積分で求められる。

$$\begin{aligned}
\iiint_V \rho dv &= \int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{a}(a-r)r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\
&= \frac{1}{a}\int_{r=0}^{a}(ar^2 - r^3)dr\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi \\
&= \frac{1}{a}\left[\frac{ar^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right]_0^a \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\left[\varphi\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{a}\left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4}\right)\cdot 2\cdot 2\pi \\
&= \frac{\pi a^3}{3} \quad \text{[kg]}
\end{aligned}$$