

## 電磁気学 I 演習 第 13 回 解答

48. 図に示すように、半径  $a$  [m] の導体球 A と内半径  $d$  [m]、外半径  $e$  [m] の同心導体球殻 C 間にこれらと中心を同じくして内半径  $b$  [m]、外半径  $c$  [m] の導体球殻 B が挿入されている。導体 A,B 間は誘電率  $\epsilon_1$  [F/m] の誘電体で満たされており、導体 B,C の間は誘電率  $\epsilon_2$  [F/m] の誘電体で満たされている。さらに導体 A,C は接地されている。今導体 B に電荷量  $Q$  [C] を与えた。以下の問に単位もあわせて答えよ。

(ヒント:  $r = a, b, c, d, e$  における真電荷量をそれぞれ  $Q_a, Q_b, Q_c, Q_d, Q_e$ 、分極電荷量を  $q_a, q_b, q_c, q_d, q_e$  とおく)

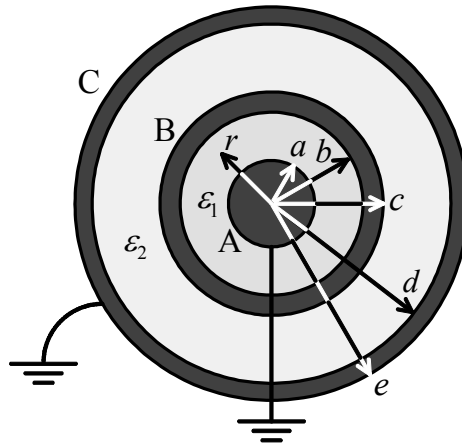
~~(1) 球の中心から  $r = a, b, c, d, e$  における真電荷量、分極電荷量を符号も含めて求めよ。~~

~~(2) 導体 B と導体 AC 間の静電容量を求めよ。~~

(3) 系に蓄えられている静電エネルギーを求めよ。ただし静電容量を用いる方法、エネルギー密度を空間積分する方法の二通りの方法で求め、両者が等しくなることを確認せよ。

(4) 導体 C の内側  $r = d$  の境界が受ける力を求めよ。

(5) 導体 B の外側  $r = c$  の境界が受ける力を求めよ。



【解答】

- (3) 系に蓄えられる静電エネルギーは、  
[電界が蓄えるエネルギー]

$$\begin{aligned}
W &= \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv = \int_a^b \frac{1}{2} \frac{Q_a^2}{16\pi^2 \varepsilon_1 r^4} 4\pi r^2 dr + \int_c^d \frac{1}{2} \frac{(Q_a + Q_b + Q_c)^2}{16\pi^2 \varepsilon_2 r^4} 4\pi r^2 dr \\
&= \frac{Q_a^2}{8\pi \varepsilon_1} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q_c^2}{8\pi \varepsilon_2} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) \\
&= \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_1} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \left( \frac{\varepsilon_1 ab(d-c)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \right)^2 + \frac{Q^2}{8\pi \varepsilon_2} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) \left( \frac{\varepsilon_2 cd(b-a)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \right)^2 \\
&= \frac{Q^2}{8\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \right)^2 \left\{ \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \varepsilon_1 (ab(d-c))^2 + \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \right) \varepsilon_2 (cd(b-a))^2 \right\} \\
&= \frac{Q^2}{8\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \right)^2 \{ (b-a) \varepsilon_1 ab(d-c)^2 + (d-c) \varepsilon_2 cd(b-a)^2 \} \\
&= \frac{Q^2}{8\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \right)^2 \{ \varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a) \} (b-a)(d-c) \\
&= \frac{Q^2}{8\pi} \frac{(b-a)(d-c)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \\
&= \frac{Q^2}{8\pi \left( \varepsilon_1 \frac{ab}{b-a} + \varepsilon_2 \frac{cd}{d-c} \right)}
\end{aligned}$$

[コンデンサが蓄えるエネルギー]

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi \left( \varepsilon_1 \frac{ab}{b-a} + \varepsilon_2 \frac{cd}{d-c} \right)}$$

(4)

境界に働く力は、 $r$  方向を力の正の向きとすると、仮想変位の原理から、

$$\begin{aligned}
F &= -\frac{\partial W}{\partial d} \Big|_{Q=\text{一定}} \\
&= -\frac{Q^2}{8\pi} \frac{\partial}{\partial d} \left\{ \frac{1}{\left( \varepsilon_1 \frac{ab}{b-a} + \varepsilon_2 \frac{cd}{d-c} \right)} \right\} = \frac{Q^2}{8\pi} \frac{1}{\left( \varepsilon_1 \frac{ab}{b-a} + \varepsilon_2 \frac{cd}{d-c} \right)^2} \left( \varepsilon_2 \frac{c(d-c)-cd}{(d-c)^2} \right) \\
&= -\frac{Q^2}{8\pi} \frac{\varepsilon_2}{\left( \varepsilon_1 \frac{ab}{b-a} + \varepsilon_2 \frac{cd}{d-c} \right)^2} \left( \frac{c}{d-c} \right)^2
\end{aligned}$$

【別解(V=一定で計算しても結果は同じ)】

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\partial W}{\partial d} \Big|_{V=\text{一定}} = \frac{\partial}{\partial d} \left( \frac{1}{2} C V^2 \right) \Big|_{V=\text{一定}} = \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial d} \\
&= \frac{V^2}{2} \frac{\partial}{\partial d} \left\{ 4\pi \left( \varepsilon_1 \frac{ab}{b-a} + \varepsilon_2 \frac{cd}{d-c} \right) \right\} = 2\pi\varepsilon_2 V^2 \frac{c(d-c)-cd}{(d-c)^2} \\
&= 2\pi\varepsilon_2 \left\{ \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{1}{\varepsilon_1 \frac{ab}{b-a} + \varepsilon_2 \frac{cd}{d-c}} \right\}^2 \frac{c(d-c)-cd}{(d-c)^2} \\
&= -\frac{Q}{8\pi} \frac{\varepsilon_2}{\left( \varepsilon_1 \frac{ab}{b-a} + \varepsilon_2 \frac{cd}{d-c} \right)^2} \left( \frac{c}{d-c} \right)^2
\end{aligned}$$

$F < 0$  なので収縮しようとする。

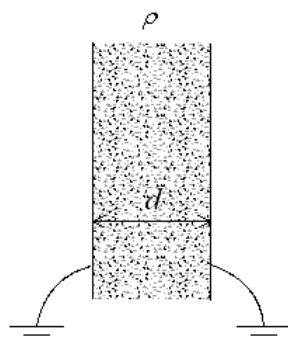
(5)

$$\begin{aligned}
F &= -\frac{\partial W}{\partial c} \Big|_{Q=\text{一定}} \\
&= -\frac{Q^2}{8\pi} \frac{\partial}{\partial c} \left\{ \frac{1}{\left( \varepsilon_1 \frac{ab}{b-a} + \varepsilon_2 \frac{cd}{d-c} \right)} \right\} = \frac{Q^2}{8\pi} \frac{1}{\left( \varepsilon_1 \frac{ab}{b-a} + \varepsilon_2 \frac{cd}{d-c} \right)^2} \left( \varepsilon_2 \frac{d(d-c)-cd(-1)}{(d-c)^2} \right) \\
&= \frac{Q^2}{8\pi} \frac{\varepsilon_2}{\left( \varepsilon_1 \frac{ab}{b-a} + \varepsilon_2 \frac{cd}{d-c} \right)^2} \left( \frac{d}{d-c} \right)^2
\end{aligned}$$

$F > 0$  なので膨張しようとする。

■

54. 図のように接地された間隔  $d$  の平行導体間に一様な電荷密度  $\rho$  が分布していると仮定して、両導体の単位面積あたりに働く力を求めよ。



【解答】

ガウスの定理と対称性をうまく利用して電界を求めてもよいが（その場合には真中の対称面を基準に体積を取り、ガウスの定理を適用する）、ここではポアソンの方程式を境界条件の下で解いて（境界値問題）まず電位を計算してみよう。

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{d}{dx} V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} x + C_1$$

$$V = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} x^2 + C_1 x + C_2$$

$$\text{境界条件: } V|_{x=0} = V|_{x=d} = 0$$

$$V|_{x=0} = C_2 = 0$$

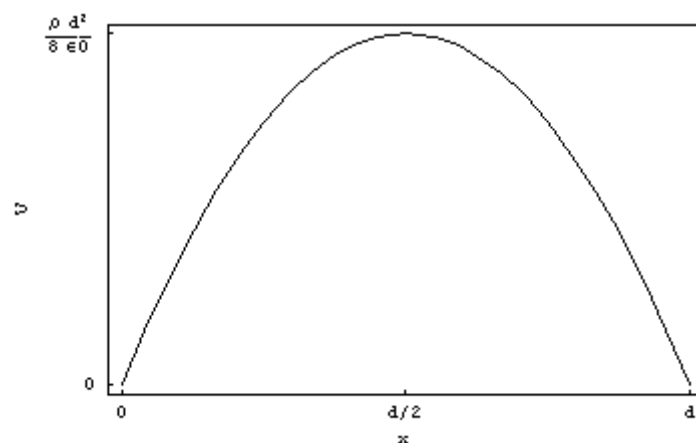
$$V|_{x=d} = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} d^2 + C_1 d = 0$$

$$-d\left(\frac{\rho}{2\varepsilon_0} d - C_1\right) = 0$$

$$C_1 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} d$$

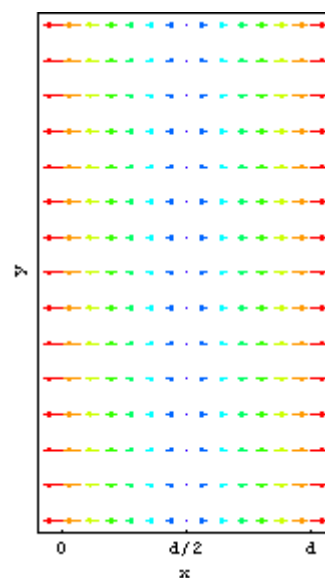
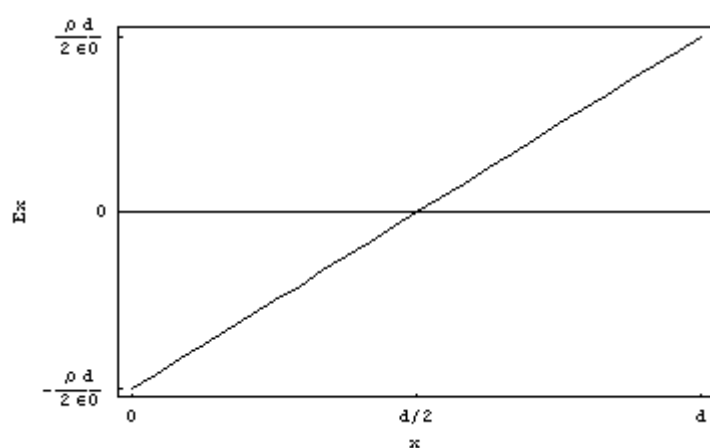
よって、

$$V = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2 + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}dx = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(x^2 - dx) = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x(x-d)$$



$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\hat{x} \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$= -\hat{x} \left\{ -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(2x-d) \right\} = \hat{x} \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(2x-d) = \hat{x} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \left( x - \frac{d}{2} \right)$$



極板の単位面積を断面とし、 $x$  方向を軸とする筒が蓄えるエネルギーは

$$W = \iiint_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 dV = \int_{x=0}^d \frac{\varepsilon_0}{2} \left\{ \frac{\rho}{\varepsilon_0} \left( x - \frac{d}{2} \right) \right\}^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right)^2 \int_{x=0}^d \left( x - \frac{d}{2} \right)^2 dx = \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right)^2 \left[ \frac{1}{3} \left( x - \frac{d}{2} \right)^3 \right]_0^d \\
&= \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right)^2 \frac{1}{3} \left\{ \left( \frac{d}{2} \right)^3 + \left( \frac{d}{2} \right)^3 \right\} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right)^2 \frac{1}{3} 2 \left( \frac{d}{2} \right)^3 \\
&= \frac{\rho^2 d^3}{24 \varepsilon_0}
\end{aligned}$$

$$F = -\frac{\partial W}{\partial d} = -\frac{(\rho d)^2}{8 \varepsilon_0}$$

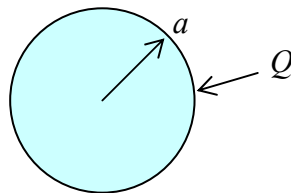
$F$  は  $d$  が増える方向を正としているので、極板は引き合う。上の  $F$  は単位面積あたりに働く力であり、単位は  $\text{N}/\text{m}^2$  である。■

#### 蓄積エネルギーの別解

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} \iiint_V \rho V dv = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \left\{ -\frac{\rho}{2 \varepsilon_0} (x^2 - d \cdot x) \right\} dv \\
&= -\frac{\rho^2}{4 \varepsilon_0} \int_{x=0}^d (x^2 - d \cdot x) dx = -\frac{\rho^2}{4 \varepsilon_0} \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{d}{2} x^2 \right]_0^d \\
&= -\frac{\rho^2}{4 \varepsilon_0} \left( \frac{d^3}{3} - \frac{d^3}{2} \right) = \frac{\rho^2 d^3}{24 \varepsilon_0}
\end{aligned}$$

■

54' . 半径  $a$  の球状の水滴がある。この水滴に  $Q$  [C] の電荷を与えたとする。水滴は導体と見なせるとすると、水滴の表面が受ける力を求めよ。



【解答】

孤立導体球の静電容量は

$$C = 4\pi \varepsilon_0 a$$

$$W = \frac{Q^2}{2C}$$

仮想変位の原理より、表面全体が受ける力は、

$$F = -\frac{\partial W}{\partial a} = -\frac{Q^2}{2} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{C} \right) = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial a} = \frac{Q^2}{2(4\pi\epsilon_0 a)^2} 4\pi\epsilon_0 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2}$$

よって、表面は半径方向に伸びる力を受けている。■

電圧が一定の場合は？

$$F = \frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{2} C V^2 \right) = \frac{V^2}{2} \frac{\partial C}{\partial a} = \frac{V^2}{2} 4\pi\epsilon_0 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2}$$

