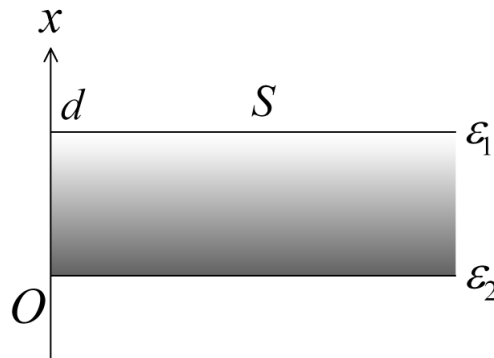


電磁気学 I 演習 第 1 2 回 解答

46. 図のように間隔 d 、面積 S の平行板コンデンサがある。極板間の誘電体の誘電率が一方の板から離れるにつれて直線的に増加する。ただし、両板における誘電体の誘電率をそれぞれ ε_1 、 ε_2 とする。上下の極板にそれぞれ $+\sigma$ 、 $-\sigma$ の面電荷密度を与えたとき、電界分布を求めよ。また、極板間の静電容量も求めよ。



【解答】

この問題では電束密度の法線成分が連続であることを利用する。

上の極板を囲むような体積にガウスの法則を適用すると、

$$-E_x S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_1}, \quad E_x = -\frac{\sigma}{\varepsilon_1}$$

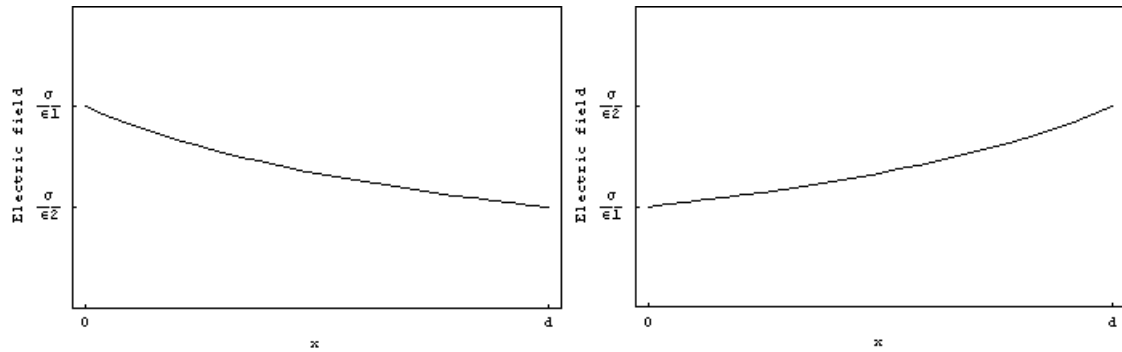
$$D_x = \varepsilon_1 E_{1x} = \varepsilon_2 E_{2x} = \varepsilon(x) E_x(x) = -\sigma$$

$$\varepsilon(x) - \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x + \varepsilon_1$$

$$E_x(x) = -\frac{\sigma}{\varepsilon(x)} = -\frac{\sigma}{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x + \varepsilon_1}$$

グラフを描くと、双曲線の一部であり、次のようになる。

 $\epsilon_1 < \epsilon_2$ のとき $\epsilon_1 > \epsilon_2$ のとき

$$\begin{aligned}
 V &= -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{x=0}^d \frac{\sigma}{\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d}x + \epsilon_1} dx = \frac{\sigma d}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \left[\ln \left(\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d}x + \epsilon_1 \right) \right]_0^d \\
 &= \frac{\sigma d}{\epsilon_2 - \epsilon_1} [\ln \epsilon_2 - \ln \epsilon_1] = \frac{\sigma d}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}
 \end{aligned}$$

よって、

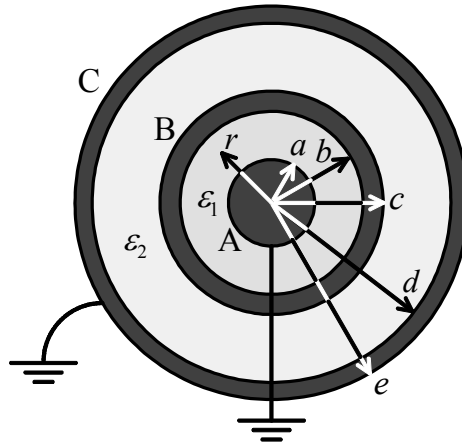
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma d}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)S}{d \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$$

■

48. 図に示すように、半径 a [m] の導体球 A と内半径 d [m]、外半径 e [m] の同心導体球殻 C 間にこれらと中心を同じくして内半径 b [m]、外半径 c [m] の導体球殻 B が挿入されている。導体 A, B 間は誘電率 ϵ_1 [F/m] の誘電体で満たされており、導体 B, C の間は誘電率 ϵ_2 [F/m] の誘電体で満たされている。さらに導体 A, C は接地されている。今導体 B に電荷量 Q [C] を与えた。以下の問に単位もあわせて答えよ。

(ヒント : $r = a, b, c, d, e$ における真電荷の総和をそれぞれ Q_a, Q_b, Q_c, Q_d, Q_e とおく)

- (1) 球の中心から $r = a, b, c, d, e$ における真電荷量、分極電荷量を符号も含めて求めよ。
- (2) 導体 B と導体 AC 間の静電容量を求めよ。



【解答】

(1) $r = a, b, c, d, e$ における真電荷の総和をそれぞれ Q_a, Q_b, Q_c, Q_d, Q_e とおく。すると、

$$Q = Q_b + Q_c$$

今導体 B の内部に閉曲面をとりガウスの法則を適用する。導体内部は電界が 0 であるから、

$$Q_a + Q_b = 0$$

導体 C の内部に閉曲面をとりガウスの法則を適用すると、同様にして、

$$Q_c + Q_d = 0$$

もし Q_e が有限の値であると、無限遠と導体 C は電位差を持つことになる。しかし今導体 C は接地されているので、

$$Q_e = 0$$

対称性により電界は放射方向成分 r のみの関数である。 $a \leq r \leq b$ に球状の閉曲面をとりガウスの法則を適用すると、

$$E(r) = \frac{-Q_b}{4\pi\epsilon_1 r^2}$$

$c \leq r \leq d$ に球状の閉曲面をとりガウスの法則を適用すると、

$$E(r) = \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_2 r^2}$$

導体 A と C はともに接地されているので電位差は 0 なので、

$$-\int_a^d E(r) dr = -\int_a^b \frac{-Q_b}{4\pi\epsilon_1 r^2} dr - \int_c^d \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_2 r^2} dr = \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_2} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{c} \right) = 0$$

よって、

$$Q_b = \frac{\epsilon_1 ab(d-c)}{\epsilon_1 ab(d-c) + \epsilon_2 cd(b-a)} Q$$

$$Q_c = \frac{\varepsilon_2 cd(b-a)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} Q$$

これより、

$$Q_a = -\frac{\varepsilon_1 ab(d-c)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} Q$$

$$Q_d = -\frac{\varepsilon_2 cd(b-a)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} Q$$

$r=a, b, c, d, e$ における分極電荷を q_a, q_b, q_c, q_d, q_e とおくと、 $r>e$ は真空なので、

$$q_e = 0$$

導体 B の内部に閉曲面をとりガウスの法則を適用すると、導体内部は電界が 0 であるから、

$$Q_a + q_a + Q_b + q_b = q_a + q_b = 0$$

導体 C の内部に閉曲面をとりガウスの法則を適用すると、

$$Q_a + q_a + Q_b + q_b + Q_c + q_c + Q_d + q_d = q_c + q_d = 0$$

$a \leq r \leq b$ における電界を分極電荷により表し、誘電率で表したものと比較することにより、

$$\frac{Q_a + q_a}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_1 r^2} \Rightarrow$$

$$q_a = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1 \right) Q_a = -\frac{\varepsilon_1 ab(d-c)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1 \right) Q$$

$$q_b = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1 \right) Q_b = \frac{\varepsilon_1 ab(d-c)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1 \right) Q$$

同様に $c \leq r \leq d$ における電界を分極電荷により表し、誘電率で表したものと比較することにより、

$$q_c = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1 \right) Q_c = \frac{\varepsilon_2 cd(b-a)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1 \right) Q$$

$$q_d = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1 \right) Q_d = -\frac{\varepsilon_2 cd(b-a)}{\varepsilon_1 ab(d-c) + \varepsilon_2 cd(b-a)} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} - 1 \right) Q$$

(2) 導体 B の電位 V は、

$$V = -\int_a^b \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_1 r^2} dr = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_1} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

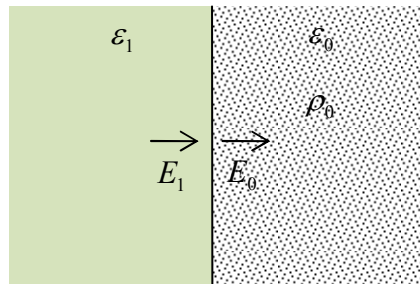
よって静電容量は、

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi \left(\varepsilon_1 \frac{ab}{b-a} + \varepsilon_2 \frac{cd}{d-c} \right)$$

■

48' . 図のように、平面境界を境に左の空間は誘電率 ε_1 の誘電体で満たされ、右の空間は誘電率 ε_0 で一様な電荷密度 ρ_0 で満たされている。左右の空間にそれぞれ E_1 , E_0 の電界の境界垂直成分があるとき、次の量を求めよ。

- (i) 左右の空間の電束密度 D_1 , D_0
- (ii) 境界上の真電荷の面電荷密度 σ
- (iii) 境界上の分極電荷の面電荷密度 σ_p



【解答】

(i)

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1$$

$$D_0 = \varepsilon_0 E_0$$

(ii)

$$(\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dv \text{ より})$$

$$D_0 - D_1 = \sigma$$

$$\sigma = D_0 - D_1 = \varepsilon_0 E_0 - \varepsilon_1 E_1$$

(iii)

$$(\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0} dv \text{ より})$$

$$E_0 - E_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} (\sigma + \sigma_p)$$

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \varepsilon_0 E_0 - \varepsilon_0 E_1 - \sigma \\ &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_1 \end{aligned}$$

■

