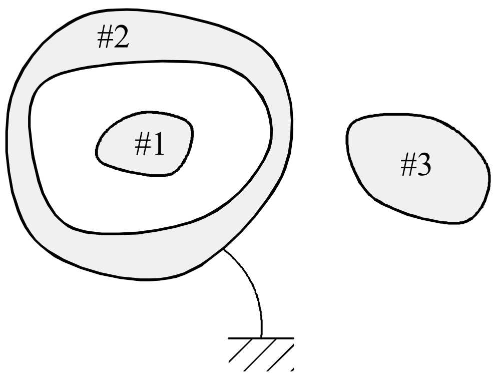
電磁気学Ｉ　演習 第１０回 解答

36. 図に示す３つの導体がある。閉殻導体#2 を接地したとき、内部の導体#1 の電位を変えても外部の導体#3 の電荷は変化せず、外部の導体#3 の電位を変えても内部の導体#1 の電荷は変化しないこと（静電遮蔽）を容量係数行列を用いて説明せよ。
（ヒント: まず適当な容量係数行列を仮定する。その行列に対して、#1 の電位を V_1 とし、それ以外を 0V にして各導体の電荷を計算する。#1 は#2 に囲まれているという条件から、各導体間の電荷に成り立つ関係を考え、容量係数行列を決定していく。そのとき容量係数行列の対称性を利用する。次に、#2 が接地されているという条件をふまえ、#1 と#3 の導体に相関があるかを判断する。）



【解答】

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

#1 を V_1 とし、それ以外を 0V にする。#1 には $Q_1 = C_{11}V_1$ の電荷が生じる。そのとき、#2 は閉じた導体なのでガウスの発散定理から、$Q_2 = -Q_1$ の電荷がある。#2,#3 はともに電位 0 なので間に電界は無く、#3 の電荷は $Q_3 = 0$ である。

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}V_1 \\ C_{21}V_1 \\ C_{31}V_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ -Q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

よって、$C_{21} = -C_{11}$，$C_{31} = 0$ となる。容量係数行列の対称性から、

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & -C_{11} & 0 \\ -C_{11} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

特に、$V_2 = 0$ なので、

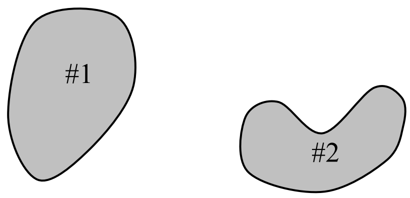
$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & -C_{11} & 0 \\ -C_{11} & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ V_3 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} Q_1 = C_{11} V_1 \\ Q_2 = -C_{11} V_1 + C_{23} V_3 \\ Q_3 = C_{33} V_3 \end{matrix}$$

となり、第 1 式、第 3 式より、

$$\begin{cases} V_1 = Q_1 / C_{11} \\ V_3 = Q_3 / C_{33} \end{cases}$$

#1,#3 の導体の電位は互いに独立となる。■

38-2. 電位係数行列がわかっている２つの導体がある。導体 1 を Q に帯電し、その後細い導線で両導体を繋いだ後に導体 1,2 が得る電荷 Q_1, Q_2 を、電位係数を用いて表しなさい。
ヒント：両導体を繋ぐと同電位になる。与えた電荷は移動するが電荷量の総和は保存される。



【解答】

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2 \\ V_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2 \end{cases}$$

導線で両導体を繋いだ後は電位が等しいので、

$V_1 = V_2$

$p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2$

$(p_{11} - p_{21}) Q_1 = (p_{22} - p_{12}) Q_2 \qquad (1)$

また、電荷は保存される（消滅したり生成したりしない）ので、

$Q_1 + Q_2 = Q$ (2)

式(1),(2)の連立一次方程式を Q_1, Q_2 について解くと、

$$(p_{11} - p_{21})Q_1 = (p_{22} - p_{12})(Q - Q_1)$$

$$(p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21})Q_1 = (p_{22} - p_{12})Q$$

$$Q_1 = \frac{p_{22} - p_{12}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}} Q$$

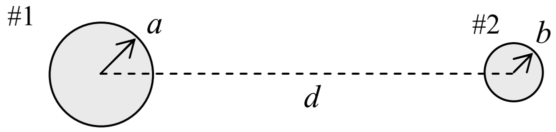
$$Q_2 = Q - Q_1 = \frac{p_{11} - p_{21}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}} Q$$

■

38-3. 半径 a, b の２つの導体球がある。２導体間の距離 d は十分離れている($d >> a, b$)とする。

(i) 片方の導体のみに電荷を与えたときに、自身ともう一方の導体につくる電位を考え、この導体系の電位係数行列を求めよ。

(ii) 導体#1 を Q に帯電し、その後細い導線で両導体を繋いだ後に導体#1,#2 が得る電荷の比 Q_2 / Q_1 を求めよ(38-2 の結果を利用)。また、そのとき、導体#1 および導体#2 の表面の電界の比 E_2 / E_1 を求めよ。



【解答】

(i)

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

$$p_{11} = \left.\frac{V_1}{Q_1}\right|_{Q_2=0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}, \quad p_{22} = \left.\frac{V_2}{Q_2}\right|_{Q_1=0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$p_{12} = \left.\frac{V_1}{Q_2}\right|_{Q_1=0} = V_2 - \int_b^{d-a-b} E_r dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b} - \int_b^{d-a-b} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b} + \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_b^{d-a-b}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 (d-a-b)} \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

$p_{21} = p_{12}$

よって、電位係数行列は

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\begin{bmatrix} 1/a & 1/d \\ 1/d & 1/b \end{bmatrix}$$

(ii)

38-2 より、

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{p_{11} - p_{21}}{p_{22} - p_{12}} = \frac{1/a - 1/d}{1/b - 1/d} \cong \frac{1/a}{1/b} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 b^2}}{\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a^2}} = \frac{a^2}{b^2}\frac{Q_2}{Q_1} \cong \frac{a^2}{b^2}\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

蓄積電荷量は半径が大きい方が多いが、表面の電界強度は半径が小さい方が強い。→尖っているところは電界が強い（避雷針の原理）

■