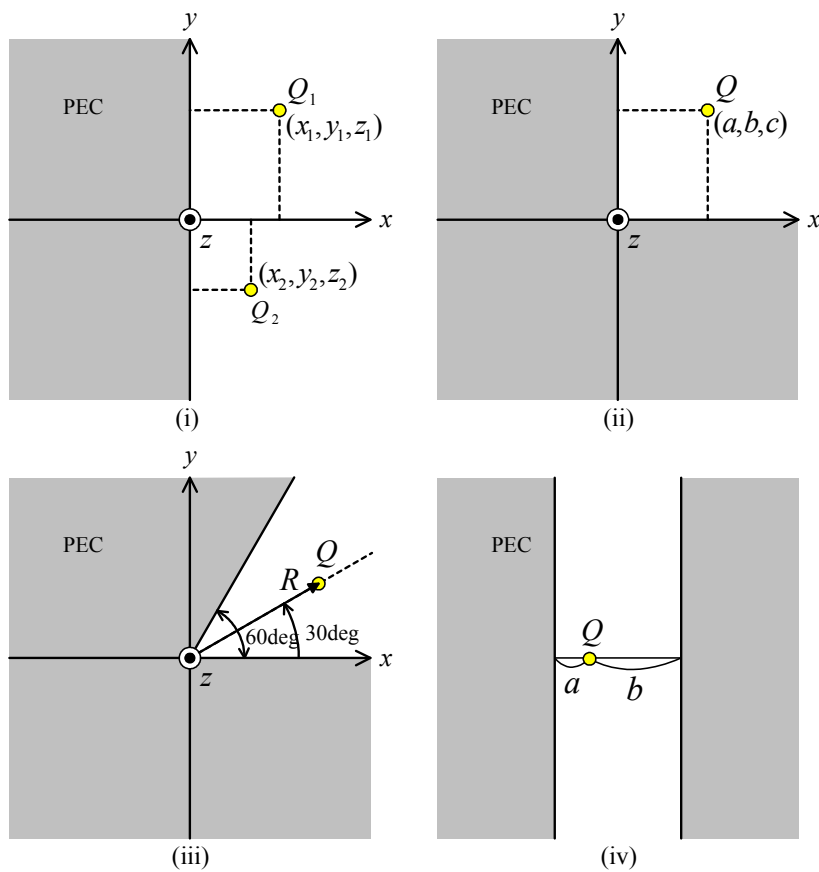


電磁気学 I 演習 第 9 回 解答

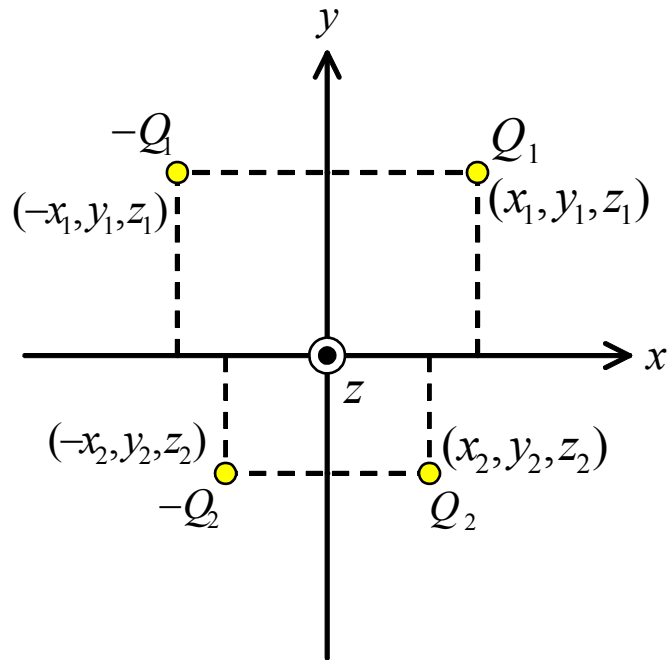
29. (i)-(iv)について、どのように映像電荷を配置したら金属板を取り除くことができるか (PEC 取り除いても PEC 以外の空間で同じ電界分布を再現できるか) 答えよ。ただし、PEC とは Perfect Electric Conductor の略であり、電氣的完全導体あるいは電気壁である。

(iv) ヒント：有限回で終わらず、無限に映像法を使う。



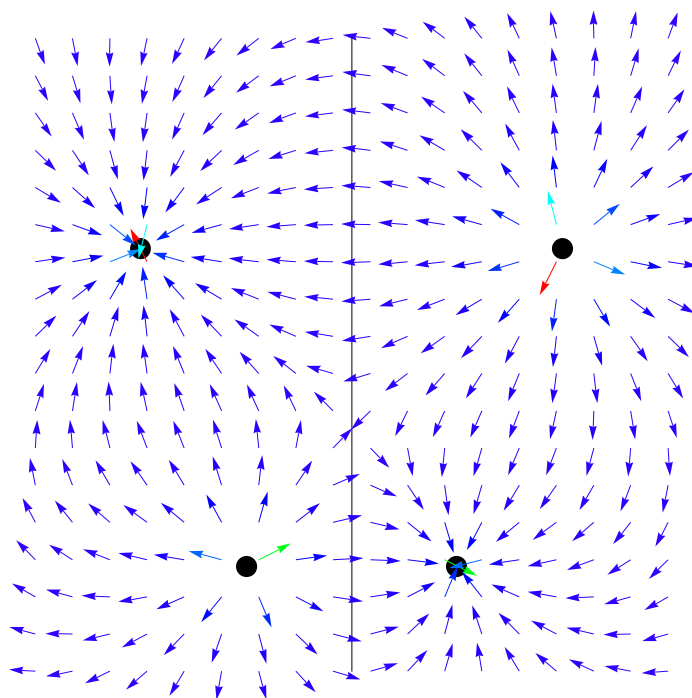
【解答】

(i)



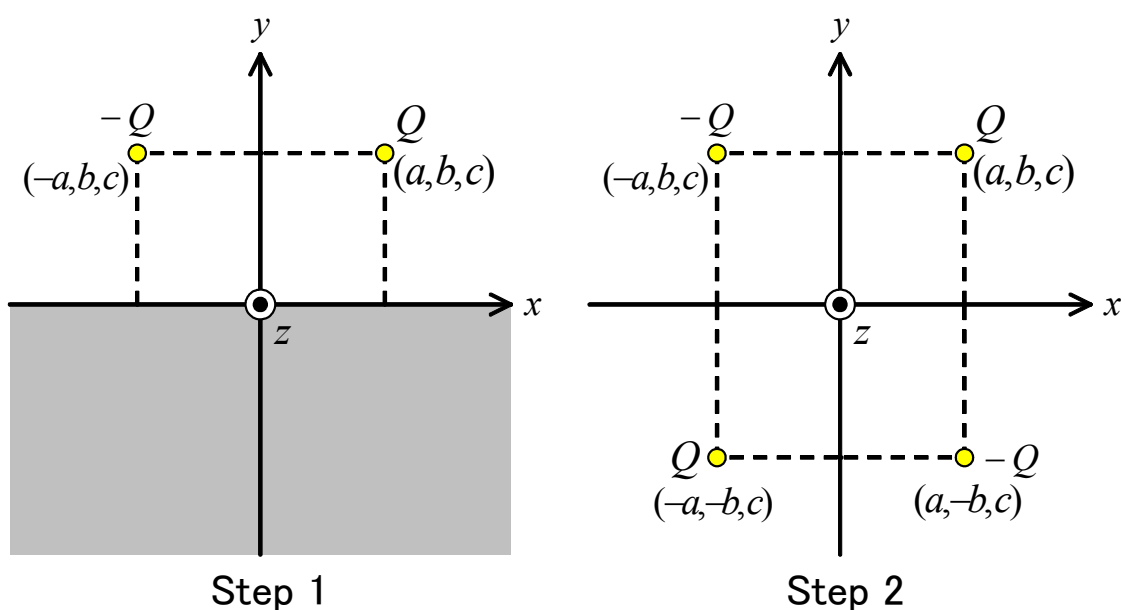
上の図のようになる。電界やポテンシャルは重ね合わせ（代数的に単純に足し算すること）ができることを思い出そう。すると、まず Q_1 については問題 1 と同じように電荷を配置する。次に Q_2 についても問題 1 と同じように電荷を配置する。ここで、フィールドを想像してみよう。 Q_1 とその映像電荷の $-Q_1$ は y - z 面に電界の横方向成分を作ることは無い。 Q_2 とその映像電荷の $-Q_2$ も y - z 面に電界の接線成分 (y, z 成分) を作ることは無い。全て自由空間として空間の電界を計算すると 4 つの電荷全てによる電界の重ね合わせだから、結局 y - z 面で電界の接線成分は至るところ 0 であり、境界条件は元の問題と同じになっている。さらに言うべきことは、今のフィールドの計算の仕方は、ポアソンの方程式を満たす電界を重ねあわせただけなので、それもやはりポアソンの方程式の解である。境界条件が同じであり、しかもそれがポアソンの方程式の解であるということは、解の一意性より、1 つの分布しか存在せず、従って元の問題の $x > 0$ の空間のフィールドと、映像電荷法で求めた $x > 0$ の空間のフィールドは全く同じものであることが保障される。

電荷が受ける力の計算は、自由空間の問題となる。ある電荷 q_A が受ける力の計算は、電荷 q_A 以外の電荷が電荷 q_A の位置に作る電界を計算し、 $\mathbf{F} = q_A \mathbf{E}$ で力を計算すればよい（実際の計算は簡単なので省略）。



(ii)

いくつか解き方があるが、次のように考えると分かりやすい。

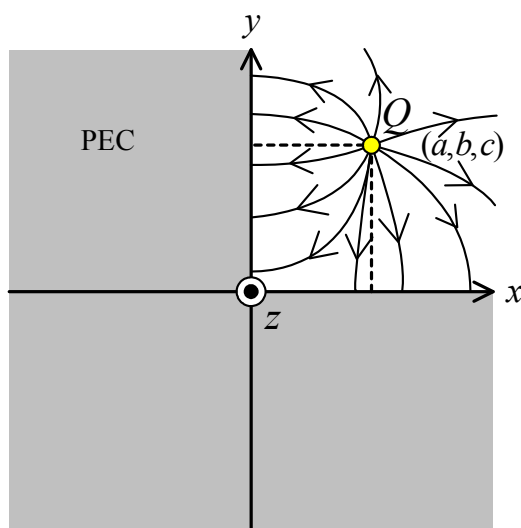


(説明)

まず Step1 のように $x=0$ の y - z 半平面を片付ける (つまり、金属を取り去って自由空間と電荷で置き換える)。下に金属があるのが気になるかもしれないから少し説明をする。

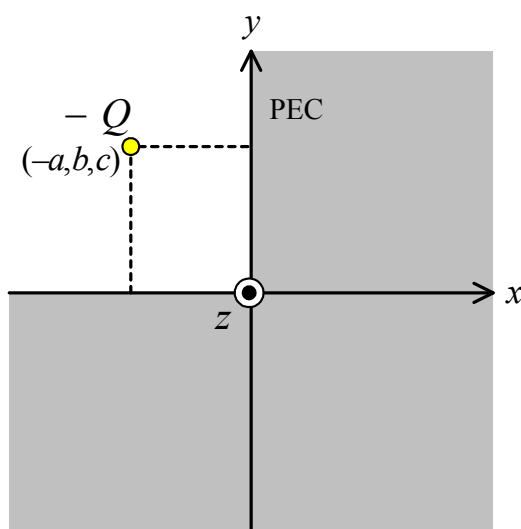
まず、オリジナルモデルのフィールドはどうなっているだろうか？厳密には分からないからこれからそれを求める訳であるが、1つだけ分かっていることがある。それは電界分布

の形は分からないが、PEC 上で電界の接線成分が無いということである。従って、イメージ的には下の図のような分布をしている。



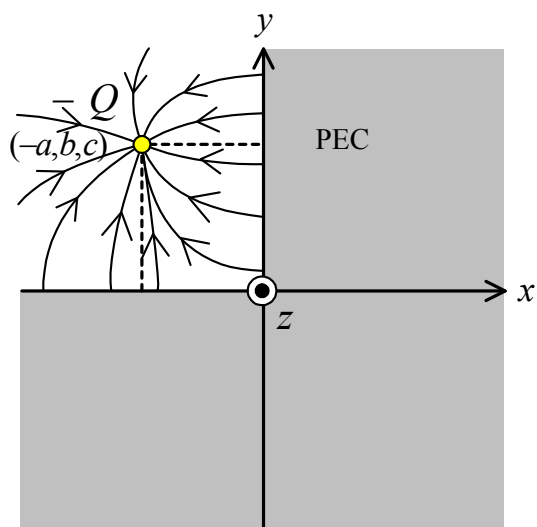
(a)

さて、次に下の図のようなモデルを考えよう。



(b)

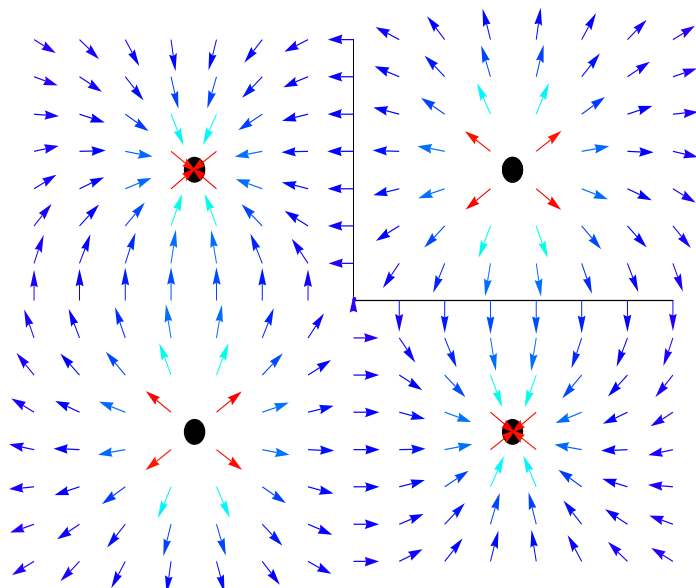
このモデルのフィールド分布も分からないが、PEC 上で電界の接線成分が 0 ということは確実である。しかも、もう一つ言えることは、図(a)のフィールド分布と形が全く同じで、電気力線の向きが反転している分布になっているということである（なぜならば、解けないかも知れないが数値的にでもポアソンの方程式を解いてフィールド分布を導出することを想像してみよう。そのとき、方程式は電荷の正負の違い以外は全く同じ形をしているからである）。したがって、図(b)のモデルのフィールド分布は次のようになる。



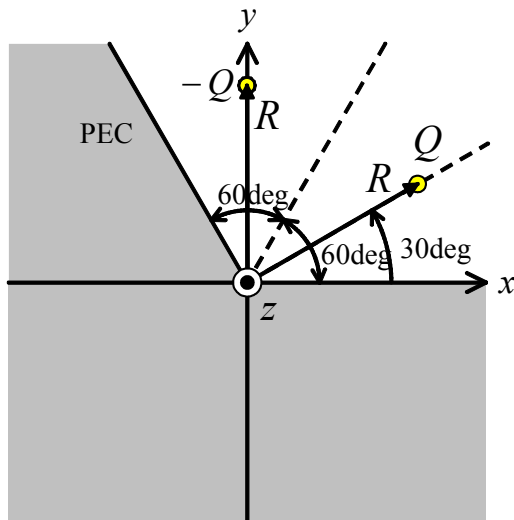
(c)

図(a), (c)では y - z 面上で電界の接線成分(y, z 成分)が 0 であり、しかも電気力線の垂直成分(x 成分)は完全に一致している。それらを連結したモデル(Step 1 のモデル)を作ってもそれはポアソンの方程式の解(現実に物理的に存在するモデル)である。

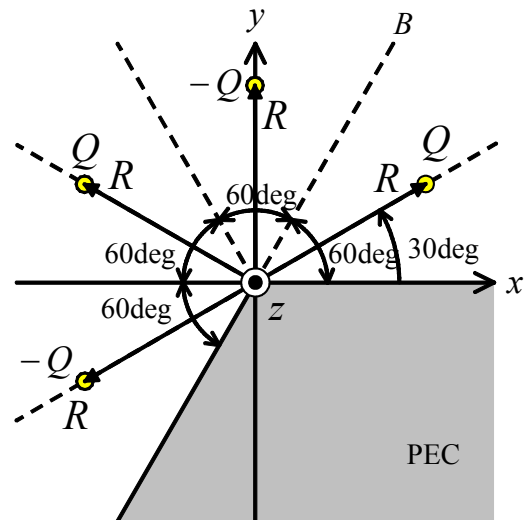
次に、Step1 から Step2 の形にする訳であるが、これは(i)の解答の説明と同じである。こうして Step2 が解となり、元の金属があるモデルでフィールドを求めるという問題が、自由空間に電界が配置されたモデルでフィールドを求めるという問題に帰着され、解法を簡単に行うことができる。



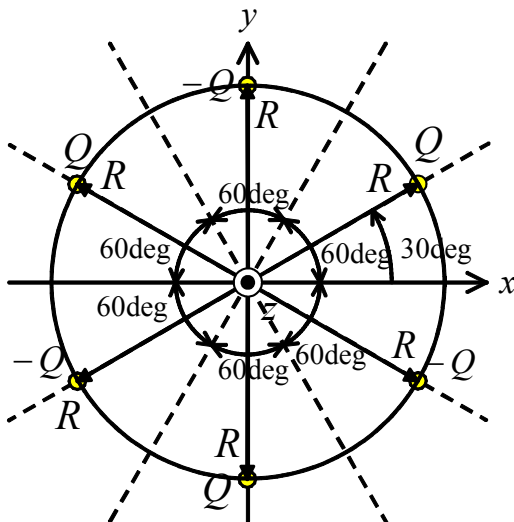
(iii)



Step 1



Step 2



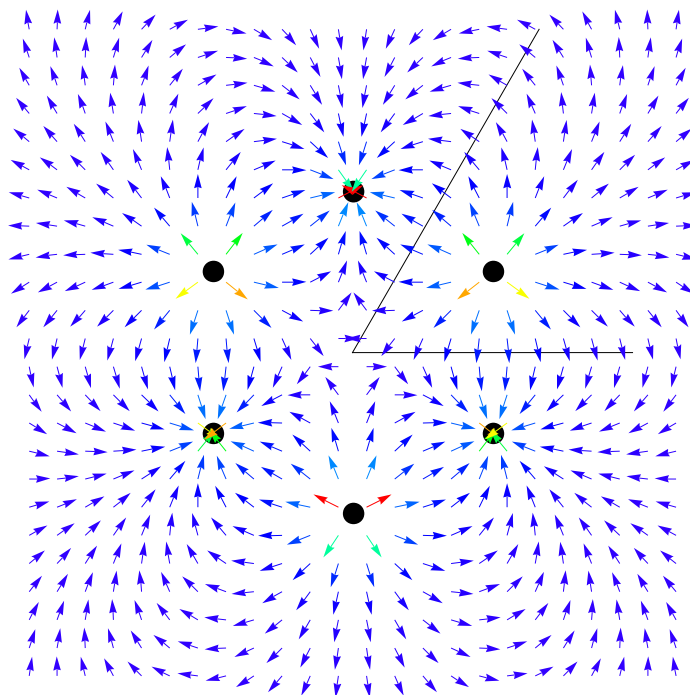
Step 3

(説明)

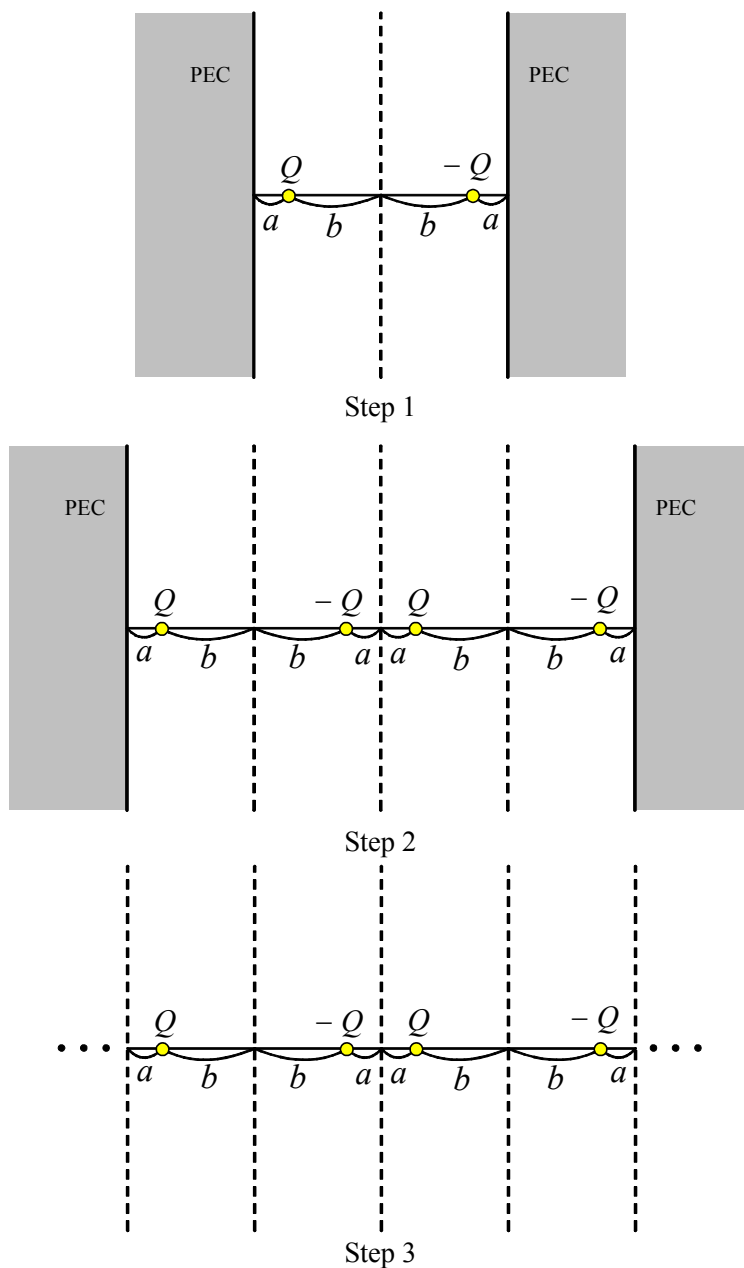
まず(ii)の問題と同様に考えて元のモデルが Step1 のようになる。さらに同様にして Step1 のモデルが Step2 のようになる。最後に Step2 を Step3 にするときにはちょっと考える必要があって、Step2 の A-B の面に関して対称に電荷の位置を折り返し、電荷の負号を反転させるのだが、原点 O-B 間は Step2 のモデルでは金属があるかどうかわからない。しかし、元のモデルでは金属が O-B にあるし、無限に薄い金属を O-B に置いても構わないので、A-B には無限に薄い金属板があると考えることができる。従って、問題(i)の考え方をを使って A-B に関して対称に折り返し、電荷の負号を反転させると Step3 になり、これが答えである (オリジナルの電荷がある空間は重なるが、結局同じ電荷を置くことになる)。

今の手順を見ていると、60 度でなくても $360^\circ / (2n)$ (n は自然数) という角度ならば、この

ような問題は電気映像法で解けることがわかる。



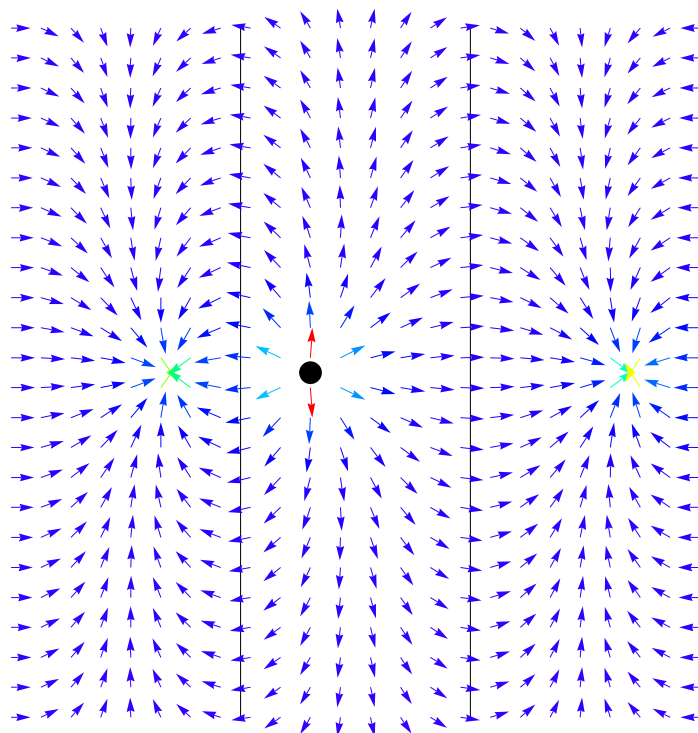
(iv)



(説明)

まず Step1 では左右のどちらかの金属壁に関して位置を対称に折り返し、電荷の負号を反転させると Step2 のようになる。Step2 でも Step1 に対する操作と同様に折り返しを繰り返すと Step3 のようになり、自由空間内の直線上に無限に電荷が配置されたモデルとなる。実際にフィールドを計算する際には無限級数となるが、遠方の電荷の影響は小さくなっていくので、実際にはある程度足せば有限和で打ち切って近似することができる。

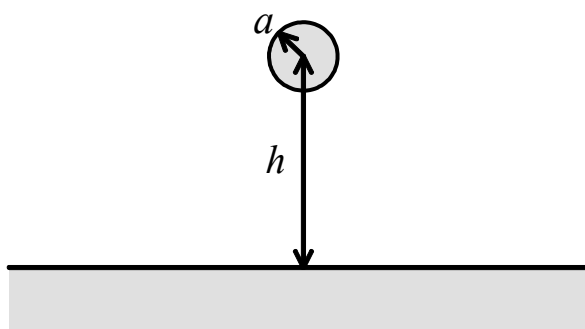
また、この問題は 2 次元フーリエ変換と Lipshitz 積分 (森口繁一・宇田川銑久・一松信、岩波数学公式 III 特殊関数、p.198、岩波書店)を用いて代数的に求めることもできる。



■

32. 地上 h [m] の高さに半径 a [m] の電線が地面に平行に置いてある。電線を λ [C/m] で帯電した時、地面に対する電線の電位を求めよ。ただし、地面は完全導体と見なすことができるものとし、 $a \ll h$ (a は h に比べて非常に小さい) とする。また、地面表面に誘起される電荷の面電荷密度を求めよ。

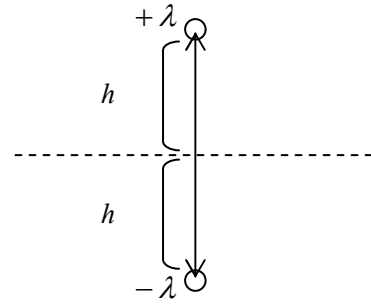
ヒント：まず映像法により、対称面に映像電荷を置き、地面を取り除く。映像電荷と導線 2 つが作る電界を求め、その電界を積分し電位を求める。電荷密度は地表面での電界を考えれば良い。



【解答】

$h \gg a$ の条件があるので、導線上の電荷分布は線電荷と見なすことができる（電気映像法

を用いたとき、映像電荷が導線付近の電界に与える影響は少なく、電界はほぼ軸対称だから)。次に、導線の地面に対する電圧を求めたい。電界を接線線積分すればよいが、簡単には求まらない。幸い、電気映像法を使えば地上の電界分布は求められる。そこで、右図のように地面を取り除き、PEC の面に対称な位置に符号が逆の電荷分布（同形状の導線）を配置する（すると地表があった場所で電界が垂直に入り、境界条件が満たされるから、解の一意性より、上の分布は元の問題と同じものが得られる）。



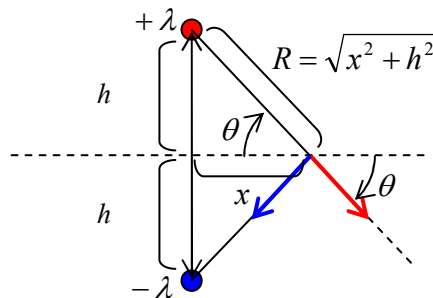
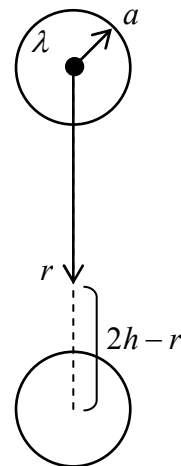
右下のように座標系を取り、線電荷を結ぶ線上で下向きを正とすると、

$$E_+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad E_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (2h-r)}$$

$$E_r = E_+ + E_- = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2h-r} \right)$$

よって、

$$\begin{aligned} V &= -\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{r=h}^a E_r (-dr) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r=a}^h \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2h-r} \right) dr \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} [\ln r - \ln(2h-r)]_a^h \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{h}{a} - \ln \frac{h}{2h-a} \right) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h-a}{a} \cong \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{a} \end{aligned}$$



上図より、線電荷の垂直位置より x 離れた位置での電界の垂直成分は、

$$E_z = -2 \cdot \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \sin\theta = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 R} \frac{h}{R} = -\frac{\lambda h}{\pi\epsilon_0 R^2} = -\frac{\lambda h}{\pi\epsilon_0 (x^2 + h^2)}$$

境界条件 $\hat{n} \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ より、

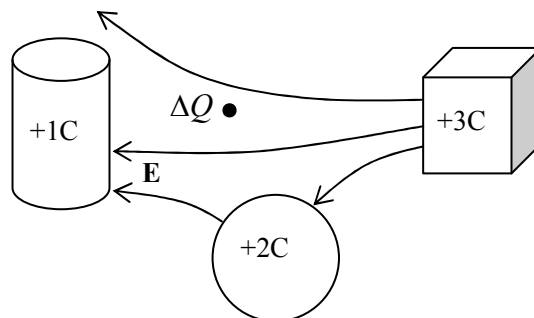
$$\hat{z} \cdot \left(\frac{\hat{z} E_z}{\underset{=\mathbf{E}_1}{}} - \frac{0}{\underset{=\mathbf{E}_2}{}} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$-\frac{\lambda h}{\pi\epsilon_0 (x^2 + h^2)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = -\frac{\lambda h}{\pi(x^2 + h^2)}$$

34. 図のように、電荷を与えた導体（あるいは誘電体）中の電界を測定するにはテスト電荷に働く力を測定すればよいが、テスト電荷の大きさ ΔQ は十分に小さくする必要がある。それは被測定電界を乱さないようにするためである。さて、ここで「テスト電荷により電界が乱される」とはどのようなことか考えて説明せよ。

早合点の F 君は「テスト電荷が作る電界が被測定電界に加わるためだ」と答えたが、彼の答は正しいだろうか。テスト電荷が作る電界はテスト電荷自身に力を与えるかを考えて答えよ。もし正しくないとすると、正しい答は何か？テスト電荷が大きく、その作る電界も大きいとき、テスト電荷以外の電荷を与えた導体（あるいは誘電体）にどのような影響があるか考え答えよ。



【解答】

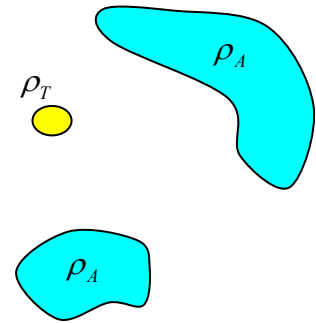
F 君の言うように、確かにテスト電荷が作る電界が被測定電界に加わる。しかし、テスト電荷の作る電界はテスト電荷自身には力を及ぼさない。これを証明しよう。

帯電導体 A による静電界を測定したいとする。このため新たに帯電導体 T を導入し、それに及ぼされる力を測定する。導体 A 上の電荷密度分布を ρ_A [C/m³]、導体 T 上の電荷密度分布を ρ_T [C/m³] と置く。すると、空間の任意の位置 $\mathbf{r}$ における静電界 $\mathbf{E}$ は、 ρ_A の作る電界 $\mathbf{E}_A$ と ρ_T の作る電界 $\mathbf{E}_T$ との和で表される。これらはクーロンの法則より、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_A(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_T(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{E}_A(\mathbf{r}) = \iiint_{V_A} \frac{\rho_A(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

$$\mathbf{E}_T(\mathbf{r}) = \iiint_{V_T} \frac{\rho_T(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$



と書ける。よって帯電導体 T に働く力 $\mathbf{F}$ は

$$\mathbf{F} = \iiint \rho_T(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) dv = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_T$$

$$\mathbf{F}_A = \iiint_{V_A} \rho_T(\mathbf{r}) \mathbf{E}_A(\mathbf{r}) dv$$

$$\mathbf{F}_T = \iiint_{V_T} \rho_T(\mathbf{r}) \mathbf{E}_T(\mathbf{r}) dv$$

のように帯電導体 A から受ける力 $\mathbf{F}_A$ と自分自身に及ぼす力 $\mathbf{F}_T$ の和で表される。 $\mathbf{F}_T$ を計算してみよう。

$$\mathbf{F}_T = \iiint_{V_T} \rho_T(\mathbf{r}) \mathbf{E}_T(\mathbf{r}) dv = \iiint_{V_T} \iiint_{V_T} \frac{\rho_T(\mathbf{r}) \rho_T(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' dv$$

最後の積分中の積分変数 $\mathbf{r}$ と $\mathbf{r}'$ を入れ換える。すると、

$$\mathbf{F}_T = \iiint_{V_T} \iiint_{V_T} \frac{\rho_T(\mathbf{r}) \rho_T(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' dv = \iiint_{V_T} \iiint_{V_T} \frac{\rho_T(\mathbf{r}') \rho_T(\mathbf{r})}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} dv' dv = -\mathbf{F}_T$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_T = \mathbf{0}$$

すなわち帯電体が自分自身に及ぼす力は $\mathbf{0}$ であり、 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_A$ 、すなわち帯電体 T の受ける力は帯電体 A の作る静電界のみによるものである。よって F 君の答えはここでは正解でない。やはり F 君は早合点であった！では答えはどうしてであろうか？

例えば、帯電された導体による電界を測定する場合を考える。導体が球であるとする、電荷は球の表面上に一様に分布している。よって導体の外部の電界は球対称となる。この球対称な電界分布を測定したい。この時、電荷量の大きい点電荷をテスト電荷として導入すると、テスト電荷による導体球の位置における電界は無視できる大きさでなくなる。すると、この電界により生じる導体中の電位差をうち消すように、導体の電荷が移動し再分布する。この再分布により生じる帯電導体球による電界はもはや球対称とはならず、測定したいものではない。よって、電界測定に使うテスト電荷の電荷量は、導体の電荷の再分布を促すような大きな値であってはならない。■

【略解】

簡単に説明する。テスト電荷 q_T が作る電界 $\mathbf{E}_T$ が被測定電界 $\mathbf{E}$ に加わろうが、テスト電荷

が受ける力は $F_T = q_T \mathbf{E}$ であることにかわりない。したがって、F 君は間違っている。しかし、テスト電荷が作る電界は被測定電界 $\mathbf{E}$ に比して十分小さくなければならない。なぜならばテスト電荷をある場所に置いたとき、そこが自由空間でない限り $\mathbf{E}_T$ によって他の媒質（導体でも誘電体でも）に電荷を誘起し、その誘起された電荷によって力を受けるからである（球殻導体の中心に電荷が置かれているときなど、対称な形をしているときはたまたま力を受けないこともあるが）。この力が被測定電界 $\mathbf{E}$ から受ける力よりも十分弱いならば、被測定電界 $\mathbf{E}$ を測定したときの誤差が少ないと言える。■