電磁気学Ｉ　演習 第１回　回答

【VA-3】 $f(x,y,z)=yz^2+zx+xy$ について，以下の経路での線積分を求めよ。

(1) OからB(1, 0, 0), C(1, 2, 0) を経てA(1, 2, 3)に至る折れ線

(2) 原点OからAまでの線分

（線分OAのパラメータ表示、$x=t, y=2t, z=3t(0\le t\le 1)$ を利用せよ）

解答

(1)

$$\begin{aligned}
\int_{O\to B\to C\to A} f(x,y,z)dl &= \int_{O\to B} f(x,y,z)dl + \int_{B\to C} f(x,y,z)dl + \int_{C\to A} f(x,y,z)dl \\
&= \int_{x=0}^{1} f(x,y,z)\Big|_{y=z=0} dx + \int_{y=0}^{2} f(x,y,z)\Big|_{\substack{x=1\\z=0}} dy + \int_{z=0}^{3} f(x,y,z)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} dz \\
&= \int_{x=0}^{1} 0dx + \int_{y=0}^{2} ydy + \int_{z=0}^{3} (2z^2+z+2)dz \\
&= 0 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}z^3 + \frac{z^2}{2} + 2z\right]_0^3 \\
&= 0 + 2 + 18 + \frac{9}{2} + 6 \\
&= \frac{61}{2}
\end{aligned}$$

(2)

線分OAをパラメータ表示すると、$x=t, y=2t, z=3t(0\le t\le 1)$。

$$f(x,y,z)=yz^2+zx+xy=(2t)(3t)^2+(3t)t+t(2t)=18t^3+5t^2$$

$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\sqrt{1^2+2^2+3^2}dt=\sqrt{14}dt$$

$$\int_{O\to A} f(x,y,z)dl = \int_{t=0}^{1}\left(18t^3+5t^2\right)\sqrt{14}dt = \sqrt{14}\left[\frac{18}{4}t^4+\frac{5}{3}t^3\right]_0^1 = \sqrt{14}\left(\frac{9}{2}+\frac{5}{3}\right) = \frac{37}{6}\sqrt{14}$$

<u>別解</u>

$$
\begin{aligned}
\int_{O\to A} f(x,y,z)dl &= \int_{O\to A} \left\{ f(x,y,z)\hat{l} \right\}\cdot d\mathbf{l} \\
&= \int_{O\to A} \left\{ f(x,y,z)\frac{\hat{x}dx+\hat{y}dy+\hat{z}dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} \right\}\cdot(\hat{x}dx+\hat{y}dy+\hat{z}dz) \\
&= \int_{O\to A} f(x,y,z)\left\{ \frac{dx^2}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} + \frac{dy^2}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} + \frac{dz^2}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} \right\} \\
&= \int_{O\to A} f(x,y,z)\left\{ \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} + \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} + \frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+1}} \right\}
\end{aligned}
$$

ここで、直線は$x=t, y=2t, z=3t(0\le t\le 1)$なので、

$$
= \int_{x=0}^{1} f(x,y,z)\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} + \int_{y=0}^{2} f(x,y,z)\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} + \int_{z=0}^{3} f(x,y,z)\frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+1}}
$$

$$
= \int_{x=0}^{1} f(x,2x,3x)\frac{dx}{\sqrt{1+2^2+3^2}} + \int_{y=0}^{2} f(y/2,y,3y/2)\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}} + \int_{z=0}^{3} f(z/3,2z/3,z)\frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+1}}
$$

$$
= \frac{37}{6}\sqrt{14}
$$

【VA-11】以下のような円筒座標系において、(3, 0, 0)から(3, $\frac{\pi}{2}$, 0)までFig.11の経路に沿って接線線積分せよ。

$$
\int_C (\sin\varphi\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\cos\varphi\hat{\varphi} + \tan\varphi\hat{\mathbf{z}})\cdot d\mathbf{l}
$$

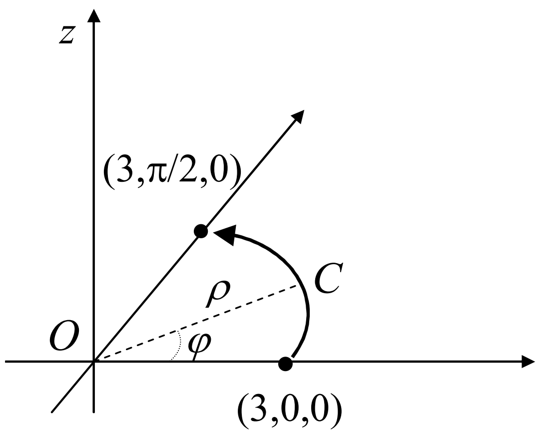

Fig. 11

解答

経路は円弧なので、円筒座標（あるいは球座標）を用いると簡単である。ここでは円筒座標を用いる。円筒座標系の線素は$d\mathbf{l} = \hat{\rho}d\rho + \hat{\varphi}\rho d\varphi + \hat{z}dz$であり、また、経路$C$は円弧で半径は一定、$z$方向の変化は無いため、$C$: $\rho = 3$, $d\rho = 0$, $dz = 0$,

$$\int_C (\sin\varphi\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\cos\varphi\hat{\varphi} + \tan\varphi\hat{\mathbf{z}})\cdot d\mathbf{l}$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi/2}(\sin\varphi\hat{\boldsymbol{\rho}} + 3\cos\varphi\hat{\varphi} + \tan\varphi\hat{\mathbf{z}})\cdot(\hat{\rho}\cdot 0 + \hat{\varphi}3d\varphi + \hat{z}\cdot 0)$$

$$= 9\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi = 9\left[\sin\varphi\right]_0^{\pi/2} = 9$$