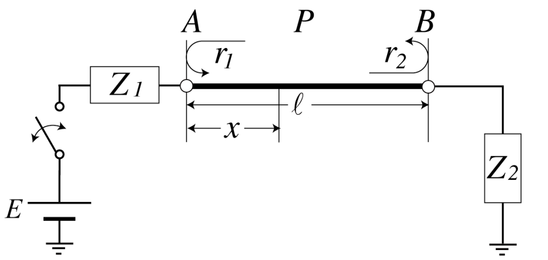
12 分布定数回路(2)

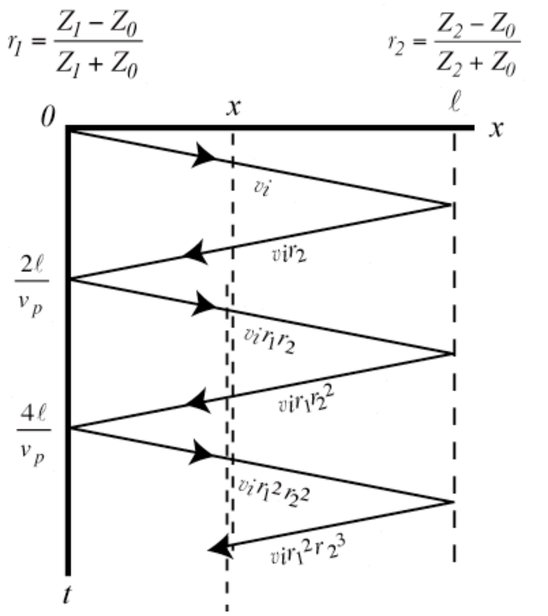
<u>多重反射の重畳による有限長線路での電圧・電流</u>

分布定数回路では線路端に特性インピーダンスと等しいインピーダンスで終端しない限り、反射を生じる。有限長線路の片端で発生した反射は、線路を伝搬して、反対側の端に到達する。ここでも整合が取れていないなら、反射を起こし、逆方向への伝搬を起こす。これが無限回繰り返されることで、線路上の電圧・電流が決まる。

ここで、特性インピーダンスZ_0を持つ長さℓの分布定数線路の入力側 A は入力インピーダンスZ_1を持つ電源Eで駆動され、出力側 B はインピーダンスZ_2で終端されているとしよう。



スイッチをいれて、駆動し始めると、まず最初は伝搬する信号にはこの線路が有限長であることは判らないから、駆動点インピーダンスはZ_0であり、電圧$v_i = E\dfrac{Z_0}{Z_0+Z_1}$の信号が点 A から点 B に向けて伝搬する。点 B では、反射係数$r_2 = \dfrac{Z_2-Z_0}{Z_2+Z_0}$で反射し、点 A に向かって進む。点 A に達すると、反射係数$r_1 = \dfrac{Z_1-Z_0}{Z_1+Z_0}$で反射し再び点 B に向かって進む。これが無限に繰り返される。無損失線路で考えると、線路を伝搬している時は、同じ振幅を保つ。



ここで、時間が充分経った時の線路上の電圧を計算すると無限公比数列になり、

$$v_P = v_i\{1 + r_2 + r_1 r_2 + r_1 r_2{}^2 + \cdots\}$$

$$= v_i\{\sum_{n=0}^{\infty}(r_1 r_2)^n + r_2\sum_{n=0}^{\infty}(r_1 r_2)^n\}$$

$$= E\frac{Z_0}{Z_0+Z_1}(1+r_2)\frac{1-(r_1 r_2)^n}{1-r_1 r_2}\Bigg|_{n=\infty}$$

となり、$|r_1 r_2| < 1$ならば収束する。

<u>基礎方程式による有限長線路での電圧・電流</u>

基礎方程式の解は

$$V(x,s) = A\,exp(-\gamma x) + B\,exp(\gamma x)$$

$$I(x,s) = \frac{1}{Z_0}(A\,exp(-\gamma x) - B\,exp(\gamma x))$$

であった。境界条件をいれてこの形を解けば、やはり同じ答えが出せる。駆動電源を$E(s)$とすると、

$x=0$で$V(0,s) = A+B$、

$I(0,s) = \dfrac{1}{Z_0}(A-B)$であり、

$V(0,s) = E(s) - Z_1 I(0,s)$なので、

$$A + B = E(s) - \frac{Z_1}{Z_0}(A-B)$$

$$A(\frac{Z_0+Z_1}{Z_0}) = E(s) + \frac{Z_1-Z_0}{Z_0}B$$

$$A=\frac{Z_0E(s)+\left(Z_1-Z_0\right)B}{Z_0+Z_1}$$

$$=E(s)\frac{Z_0}{Z_0+Z_1}+r_1B$$

$x=\ell$で

$$V(\ell,s)=A\exp(-\gamma\ell)+B\exp(\gamma\ell)$$

$$I(\ell,s)=\frac{1}{Z_0}(A\,exp(-\gamma\ell)-B\,exp(\gamma\ell))$$

$V(\ell,s)=I(\ell,s)Z_2$なので、

$$A\exp(-\gamma\ell)+B\exp(\gamma\ell)$$

$$=\frac{Z_2}{Z_0}(A\exp(-\gamma\ell)-B\exp(\gamma\ell))$$

$$B\,exp(2\gamma\ell)(\frac{Z_0+Z_2}{Z_0})=A\frac{Z_2-Z_0}{Z_0}$$

$$B\,exp(2\gamma\ell)=A\frac{Z_2-Z_0}{Z_0+Z_2}=Ar_2$$

両方会わせて

$$B\,exp(2\gamma\ell)=(E(s)\frac{Z_0}{Z_0+Z_1}+r_1B)r_2$$

$$B\frac{1-r_1r_2\,exp(-2\gamma\ell)}{exp(-2\gamma\ell)}=\frac{E(s)Z_0r_2}{Z_0+Z_1}$$

$$B=\frac{E(s)Z_0r_2}{Z_0+Z_1}\frac{exp(-2\gamma\ell)}{(1-r_1r_2\,exp(-2\gamma\ell))}$$

$$A=\frac{E(s)Z_0}{Z_0+Z_1}\frac{1}{(1-r_1r_2\,exp(-2\gamma\ell))}$$

$$V(x,s)$$

$$=\frac{E(s)Z_0}{Z_0+Z_1}\frac{\exp(-\gamma x)+r_2\exp(-\gamma(2\ell-x))}{(1-r_1r_2\exp(-2\gamma\ell))}$$

$$=\frac{E(s)Z_0}{Z_0+Z_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(r_1r_2\right)^n\left(e^{-\gamma(2n\ell+x)}+r_2e^{-\gamma(2n\ell+2\ell-x)}\right)$$

となり、$\gamma=0$とすれば先と同じ形となる。無損失で、波の速度が無限大に相当するので、定常状態の 1 変形とも言える。なお、分母にγから s の指数項が入ると逆フーリエ出来ないので、先とは逆に公比数列の和の形に戻している。

ここで、無損失線路の場合に、$Z_1=0$, $Z_2=\infty$、ステップ電圧源$E(s)=\frac{E}{s}$と考えた例をラプラス変換で示そう。$r_1=-1$、$r_2=1$、$\gamma=\frac{s}{v_p}$になる。

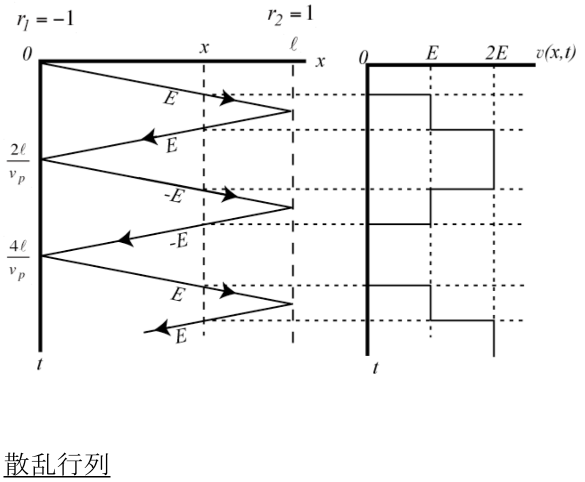
$$V(x,s)=\frac{E}{s}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(e^{-\gamma(2n\ell+x)}+e^{-\gamma(2n\ell+2\ell-x)}\right)$$

$$=\frac{E}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\begin{array}{l}e^{-\frac{s}{v_p}(4n\ell+x)}+e^{-\frac{s}{v_p}(4n\ell+2\ell-x)}\\-e^{-\frac{s}{v_p}(4n\ell+2\ell+x)}-e^{-\frac{s}{v_p}(4n\ell+4\ell-x)}\end{array}\right)$$

逆変換は

$$v(x,t)=E\sum_{n=0}^{\infty}\left[\begin{array}{l}u(t-\frac{4n\ell+x}{v_p})+u(t-\frac{4n\ell+2\ell-x}{v_p})\\-u(t-\frac{4n\ell+2\ell+x}{v_p})-u(t-\frac{4n\ell+4\ell-x}{v_p})\end{array}\right]$$

となり、電圧は時間に対して$\frac{4\ell}{v_p}$を周期として、公比の絶対値が 1 になるので収束せず、振動を繰り返す。電流も同様である。



散乱行列

ここまで見てきた様に、分布定数線路内の動きは、

$$V(x,s)=A\,exp(-\gamma x)+B\,exp(\gamma x)$$

$$I(x,s)=\frac{1}{Z_0}(A\,exp(-\gamma x)-B\,exp(\gamma x))$$

という基礎方程式の解を解いて係数を出して考えていったが、このA、Bの二つの係数は、x の正の方向に進む進行波と x の負の方向に

進む進行波という物理的なイメージがある。そこで、進行波の大きさを電圧・電流に変わるパラメータとして、二端子回路対網の形として考えるのが散乱行列である。

X の正方向にすすむ進行波は入射波と呼ばれるが、位置 x での入射波の電圧の大きさは

$A\,exp(-\gamma x)=\dfrac{V(x,s)+Z_0I(x,s)}{2}$ で、

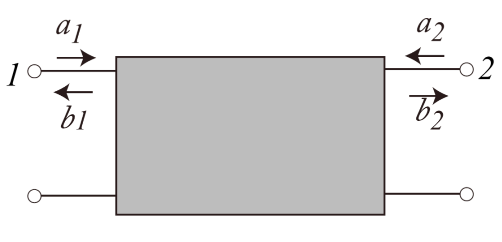
電流は $\dfrac{A\,exp(-\gamma x)}{Z_0}=\dfrac{V(x,s)+Z_0I(x,s)}{2Z_0}$ で計算できる。電流と電圧の積から出てくるのは電力であり、

$\dfrac{\left|V(x,s)+Z_0I(x,s)\right|^2}{4Z_0}$ となる。そこで電力の平方根の形で入射波の振幅aを表すこととすると、$a=\dfrac{V(x,s)+Z_0I(x,s)}{2\sqrt{Z_0}}$ という大きさになる。同様に X の負の方向にすすむ進行波である反射波の振幅bは、

$b=\dfrac{V(x,s)-Z_0I(x,s)}{2\sqrt{Z_0}}$ となる。

$V(x,s)=\sqrt{Z_0}\left(a+b\right),\quad I(x,s)=\dfrac{a-b}{\sqrt{Z_0}}$ と、簡単にこの二つの振幅から進行波の和による電圧・電流を出すことができる。

入射波、反射波の変化を二端子対回路対網として考えよう。



この様に入出力を入射波・反射波の振幅で定義して、$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ として表した二端子回路対網の表現方法が散乱行列である。

ここで、通常には外側は特性インピーダンスの等しい分布定数回路で繋がっていると考えれば良い。

もしも、単純に特性インピーダンスの等しい分布定数回路が繋がっていたとしよう。この散乱行列は、長さを ℓ とすると、$b_2=a_1\,exp(-\gamma\ell), b_1=a_2\,exp(-\gamma\ell)$ であり、

$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & exp(-\gamma\ell) \\ exp(-\gamma\ell) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ となる。

次にあるところで分布定数回路が切れていたとしよう。両方の側から見ても開放になっているとしても良い。

この部分のみを散乱行列で表そうとすると電流が 0 になるので、$\dfrac{a_1-b_1}{\sqrt{Z_0}}=0$、$\dfrac{a_2-b_2}{\sqrt{Z_0}}=0$ となる。

$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ となる。

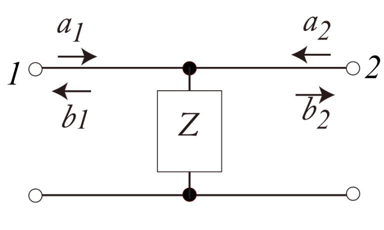
逆に有るところで短絡していたとしよう。

電圧が 0 になるので、$\sqrt{Z_0}(a_1+b_1)=0$、$\sqrt{Z_0}(a_2+b_2)=0$

$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

となる。

電圧と電流の形にして、特性インピーダンスを（関係なくても良いので）仮定すれば、集中定数回路も散乱行列で扱える。例えば、2 本の線路の間にインピーダンスZがアースとの間に入っているとしよう。



散乱行列を作ると、電圧は両側で等しいので、

$\sqrt{Z_0}(a_1+b_1)=\sqrt{Z_0}(a_2+b_2)$

二つの流れ込む電流の和が、インピーダンス Z に流れる電流なので、

$\sqrt{Z_0}(a_1+b_1)=Z\left(\dfrac{a_1-b_1}{\sqrt{Z_0}}+\dfrac{a_2-b_2}{\sqrt{Z_0}}\right)$

整理して、a_1とa_2でb_1とb_2を表せばよい。

$$b_2 = a_1 + b_1 - a_2$$

$$a_1 + b_1 = \frac{Z}{Z_0}(a_1 + a_2 - b_1 - b_2) = \frac{Z}{Z_0}(2a_2 - 2b_1)$$

$b_1(2Z + Z_0) = 2Za_2 - Z_0a_1$　な　の　で

$$b_1 = \frac{2Za_2 - Z_0a_1}{2Z + Z_0}$$

同様にして$b_2 = \dfrac{2Za_1 - Z_0a_2}{2Z + Z_0}$

散乱行列は$\dfrac{1}{2Z + Z_0}\begin{pmatrix} -Z_0 & 2Z \\ 2Z & -Z_0 \end{pmatrix}$となる。

散乱行列は２端子対回路を表すＺ行列やＹ行列などに変換することが出来る。