2-3.フーリエ変換と線形システム

2-3-1 線形回路の性質

例えば、図 2-1 に示す回路を考える。左側の端子対に電圧 $v_i(t)$ を印加した結果、コンデンサの両端に電圧 $v_c(t)$ が発生したとする。$v_c(t)$ は時間とともにどのように変化するであろうか。

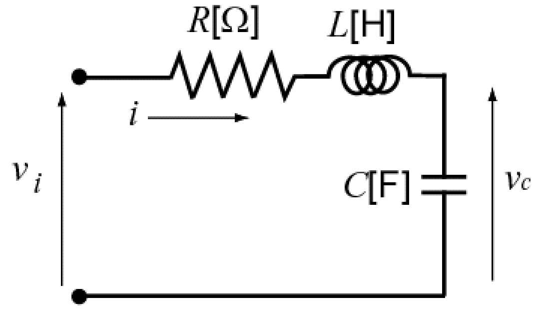

図 2-1

与えた入力 $f(t)$ による出力(応答) $g(t)$ は、回路の特性によって決まる。これを回路の特性を表す演算子 T を用いて次のように表現する。

$$T[f(t)] = g(t) \tag{2.25}$$

以下においては、次の性質がある回路を対象とする。

(i)線形性

$$T[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha T[f_1(t)] + \beta T[f_2(t)] = \alpha g_1(t) + \beta g_2(t) \tag{2.26}$$

(ii)時不変性：系の特性が時間によって変化しない

$$T[f(t)] = g(t) \text{ なら } T[f(t-\tau)] = g(t-\tau) \tag{2.27}$$

(iii)因果律：結果が原因より先に現れることはない

$t < 0$ で入力 $f(t) = 0$ であるとすれば、$t < 0$ において $T[f(t)] = g(t) = 0$ である。

さらに、δ 関数を入力として与えた場合の回路の応答を $h(t)$ （インパルスレスポンス）とすると $T[\delta(t)] = h(t)$ であり、一般の入力 $f(t)$ に対する応答 $g(t)$ は次のような関係がある。

(i) 一般の入力 $f(t)$ は δ 関数の性質により次のように表される。

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{2.28}$$

(ii) δ 関数入力の応答 $T[\delta(t)] = h(t)$ と系の時不変性により $T[\delta(t-\tau)] = h(t-\tau)$ が成り立つ。

(iii) 入力 $f(t)$ に対する応答 $g(t)$ は回路の特性を表す演算子 T を用いて次のように表される。

$$g(t) = T[f(t)] = T\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] \tag{2.29}$$

ここで、演算子 T は時間変数 t に対する演算子であるから、

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)T[\delta(t-\tau)]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{2.30}$$

（入力 $f(t)$ と δ 関数入力の応答 $h(t)$ の畳み込み）

$t' = t - \tau$ と変数変換すれば、式(2.30)は次のように書くことができきる。

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t')T\left[\delta(t')\right]dt' = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau \tag{2.31}$$

(iv)因果律より、$t<0$ で $\delta(t)=0$ だから $h(t)=0 \quad (t<0)$、$h(t-\tau)=0 \quad (t-\tau<0)$。すなわち、$t<\tau$ で $h(t-\tau)=0$ となる。したがって入力 $f(t)$ に対する応答 $g(t)$ は次の式で与えられる。

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} f(t-\tau)h(\tau)d\tau \tag{2.32}$$

2-3-2 回路応答のフーリエ変換

(1)インパルスレスポンスによる回路応答の表現

入力 $f(t)$ に対する応答 $g(t)$ と回路のインパルスレスポンス $T\left[\delta(t)\right] = h(t)$ を考える。入力 $f(t)$、応答 $g(t)$、回路のインパルスレスポンス $h(t)$ のフーリエ変換を、それぞれ $F(\omega) = \mathcal{F}\left[f(t)\right]$、$G(\omega) = \mathcal{F}\left[g(t)\right]$、$H(\omega) = \mathcal{F}\left[h(t)\right]$ とする。式(6.6)に示されるように、$g(t)$ は $f(t)$ と $h(t)$ の畳み込み積分で与えられるので、それぞれのフーリエ変換の間には次の関係が成り立つ。

$$G(\omega) = \mathcal{F}\left[g(t)\right] = \mathcal{F}\left[f * h\right] = \mathcal{F}\left[f(t)\right]\mathcal{F}\left[h(t)\right] = F(\omega)H(\omega) \tag{2.33}$$

さらに、逆変換の式から $g(t)$ は次の式で与えられる。

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{2.34}$$

式(2.33)、(2.34)の意味：

- 回路の周波数特性が $H(\omega) = \mathcal{F}\left[h(t)\right]$ で表されると考えれば、応答のスペクトル密度 $G(\omega) = \mathcal{F}\left[g(t)\right]$ は入力スペクトル密度 $F(\omega) = \mathcal{F}\left[f(t)\right]$ と $H(\omega) = \mathcal{F}\left[h(t)\right]$ の積で決まるということを表す。
- 回路の周波数特性 $H(\omega) = \mathcal{F}\left[h(t)\right]$ のうち、振幅特性は $\left|H(\omega)\right|$ で表され、位相特性は $\arg\left[H(\omega)\right]$ で表される。
- 応答の時間波形を得るためには、$G(\omega) = F(\omega)H(\omega)$ をフーリエ逆変換すればよい。

(2)正弦波入力に対する応答

正弦波のフーリエ変換は次のようになる。

$$F(\omega) = \mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0-\omega)t}dt \tag{2.35}$$

ここで、δ 関数のフーリエ逆変換の関係 $\delta(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}d\omega$ から、

$$\delta(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}dt \tag{2.36}$$

が成り立つので、式(2.35)は次のようになる。

$$\mathcal{F}\left[e^{j\omega_0 t}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{j(\omega_0-\omega)t}dt=2\pi\delta(\omega_0-\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0) \tag{2.37}$$

したがって、式(2.34)から正弦波入力 $e^{j\omega_0 t}$ に対する回路応答は

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0)H(\omega)e^{j\omega t}d\omega=H(\omega_0)e^{j\omega_0 t} \tag{2.38}$$

となる。すなわち、正弦波入力 $e^{j\omega_0 t}$ に対する回路の時間応答は $H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$ となり、伝達関数はインパルスレスポンスのフーリエ変換で $\omega=\omega_0$ とした関数に等しいことがわかる。

[例]

図 2-2 の回路で、コンデンサの両端の電圧 $v_c(t)$ を入力電圧 $f(t)$ に対する応答と考え、その関係を時間領域と周波数領域で考える。

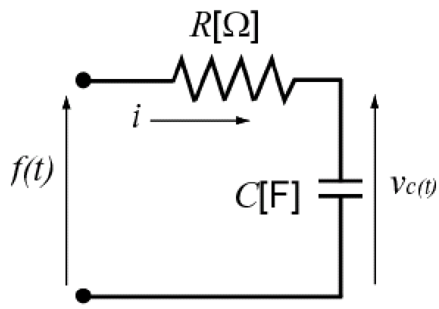

図 2-2 R-C 直列回路

(a)回路のインパルスレスポンス $T\left[\delta(t)\right]=h(t)$

$i(t)=C\dfrac{dv_c}{dt}$ であるから、

$$Ri(t)+v_c(t)=RC\frac{d}{dt}v_c(t)+v_c(t)=\delta(t) \tag{2.39}$$

（入力電圧が印加される前は $v_c(0\_)=0$ ）

まず、$t>0$ における関数の形を求める。$t>0$ で $\delta(t)=0$ あるから、式(2.39)は次のようになる。

$$RC\frac{d}{dt}v_c(t)+v_c(t)=0$$

$$\frac{d}{dt}v_c(t)=-\frac{1}{RC}v_c(t)$$

すなわち、$t>0$ で

$$v_c(t)=a\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \tag{2.40}$$

つぎに、$t=0$ における初期値を求めるために、式(2.39)の両辺を $t=0$ の前後 $-\varepsilon\le t\le\varepsilon$ にわたって積分し、$\varepsilon\to 0$ とする。

$$RC\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{d}{dt}v_c(t)dt+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}v_c(t)dt=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt \tag{2.41}$$

において、$\varepsilon \to 0$ とすると

$$RC\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{d}{dt}v_c(t)dt = RC\left[v_c(\varepsilon)-v_c(-\varepsilon)\right] \to RCv_c(0_+)$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}v_c(t)dt \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)dt \to 1$$

であるから、式(2.41)から次の初期値を得る。

$$v_c(0_+) = \frac{1}{RC}$$

したがって、$v_c(t)$ のインパルスレスポンス(時間領域の応答)は次のようになる。

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{RC}\exp\left(-\dfrac{t}{RC}\right) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2.42}$$

このインパルスレスポンスのフーリエ変換を求める。

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty}\frac{1}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{RC}\left[\frac{\exp\left(-\left(\dfrac{1}{RC}+j\omega\right)t\right)}{-\left(\dfrac{1}{RC}+j\omega\right)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{1+j\omega CR} \tag{2.43}$$

(b)交流理論による定常波解析

入力(印加電圧)を $f(t)=e^{j\omega t}$ とすると定常波解析が適用でき、回路を流れる電流の複素表現

$$I(t) = \frac{e^{j\omega t}}{R+\dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega Ce^{j\omega t}}{1+j\omega CR} \tag{2.44}$$

から、コンデンサの両端の電圧(応答)は、次のようになる。

$$V_c(t) = \frac{1}{j\omega C}\frac{e^{j\omega t}}{R+\dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{e^{j\omega t}}{1+j\omega CR} \tag{2.45}$$

すなわち $H(\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega CR}$ であるから、確かに入力 $f(t)=e^{j\omega t}$ に対する応答は $H(\omega)e^{j\omega t}$ になっている。

つまり、<u>「(a)の方法のように微分方程式を解いてインパルスレスポンス $H(\omega)$ を求める必要はなく、より簡単な交流の定常波解析によって入力 $f(t)=e^{j\omega t}$ に対する応答（$H(\omega)e^{j\omega t}$）を求め、その結果を $e^{j\omega t}$</u>

で除すればインパルスレスポンス$H(\omega)$が得られる」ということである。

さらに、δ関数入力に対する電流$i(t)$を考えると、$i(t)=C\dfrac{dv_c}{dt}$であるからこのフーリエ変換は次のようになる。

$$\mathcal{F}[i(t)]=\mathcal{F}\left[C\frac{dv_c}{dt}\right]=j\omega C\mathcal{F}[v_c(t)]=\frac{j\omega C}{1+j\omega RC} \tag{2.46}$$

式(2.44)より$I(t)=\dfrac{e^{j\omega t}}{R+\dfrac{1}{j\omega C}}=\dfrac{j\omega Ce^{j\omega t}}{1+j\omega CR}$であるから、電流についても入力$f(t)=e^{j\omega t}$に対する応答は$\delta$関数入力の応答$\mathcal{F}[i(t)]=\dfrac{j\omega C}{1+j\omega RC}$と$e^{j\omega t}$の積で与えられることが確かめられた。

2-3-3 回路の時間応答と周波数応答

回路のインパルスレスポンスが分かれば、任意の入力に対する周波数応答や時間応答を求めることが自由にできる。このことを、次の例で理解しよう。

(1)R-C 直列回路

図 2-2 の R-C 直列回路で、時間応答と周波数応答の関係を考えてみる。

この回路に、単一矩形パルスを入力した場合の応答(コンデンサの両端の電圧)を調べる。

・コンデンサ両端の電圧のインパルスレスポンス：$H(\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega CR}$

・入力信号(単一矩形パルス) のスペクトル密度：$F(\omega)=2E\dfrac{\sin a\omega}{\omega}$

・応答(コンデンサの両端の電圧)のスペクトル密度：$G(\omega)=F(\omega)H(\omega)=2E\dfrac{\sin a\omega}{\omega}\dfrac{1}{1+j\omega CR}$

$$\begin{aligned}
g(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}d\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2E\frac{\sin a\omega}{\omega}\frac{1}{1+j\omega CR}e^{j\omega t}d\omega\\
&=\frac{E}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin a\omega}{\omega}\frac{1}{1-j\omega CR}e^{-j\omega t}d\omega+\frac{E}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin a\omega}{\omega}\frac{1}{1+j\omega CR}e^{j\omega t}d\omega\\
&=\frac{2E}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin a\omega}{\omega}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{1+j\omega CR}e^{j\omega t}\right]d\omega\\
&=\frac{2E}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin a\omega}{\omega}\frac{\cos\omega t+\omega CR\sin\omega t}{1+(\omega CR)^2}d\omega
\end{aligned}$$

ここで、$x=\dfrac{t}{a}$ (時間軸はパルス幅で規格化)、$a\omega=u$ として $\omega t=ux$、さらに $\dfrac{CR}{a}=c$ とおいて整理する。

$$g(t)=\frac{2E}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a\omega}{\omega}\frac{\cos\omega t+\omega CR\sin\omega t}{1+(\omega CR)^2}d\omega$$

$$=\frac{2E}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a\omega}{a\omega}\frac{\cos\omega t+a\omega\dfrac{CR}{a}\sin\omega t}{1+\left(a\omega\dfrac{CR}{a}\right)^2}d(a\omega)$$

$$=\frac{2E}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\frac{\cos ux+uc\sin ux}{1+(uc)^2}du$$

この式に基づいて計算した時間応答波形を図 2-3 に示す。

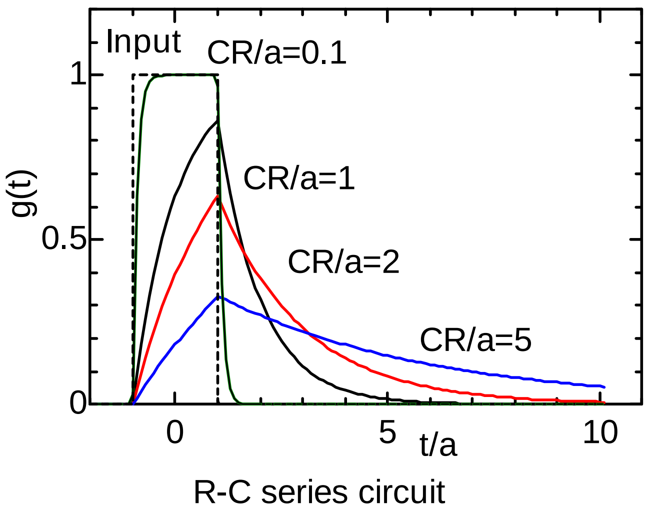

図 2-3 R-C 直列回路の時間応答(入力パルス幅 2a)